ТЕОН СМИРНСКИЙ

ИЗЛОЖЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЕЩЕЙ, ПОЛЕЗНЫХ ПРИ ЧТЕНИИ ПЛАТОНА

Перевод и примечания А. И. Щетникова

Введение

Всякий согласится, что невозможно понять сказанное Платоном о математике, не упражняясь в этой теории. Он и сам неоднократно показал, что этот опыт не является бесполезным и ненужным. Поэтому повезло тому, кто приступает к чтению сочинений Платона, будучи опытным в геометрии, музыке и астрономии. Однако изучение этих наук не является простым и легким, но требует упорного труда с детстких лет. И дабы тот, кто не имел возможности упражняться в математике, но все же хотел бы изучать писания Платона, не потерпел при этом полную неудачу, мы рассмотрим здесь существенные и необходимые признаки важнейших математических теорем арифметики, музыки, геометрии, стереометрии и астрономии, без которых, как говорил Платон, невозможна блаженная жизнь.

Эратосфен написал в книге *Платоник*, что когда делосцы спросили бога, как им избавится от чумы, тот предписал соорудить алтарь вдвое больший в сравнении с имевшимся. Эта задача вызвала затруднение строителей, не понимавших, как получить одно тело в два раза больше другого, и они пришли спросить о ней у Платона. Тот ответил, что богу от делосцев нужен не столько двойной алтарь, сколько то, чтобы эллины перестали пренебрегать науками и уделили должное внимание геометрии.

Следуя совету пифии, он и сам много рассуждает о полезности математических наук. Обращаясь к ученикам в *Послезаконии*, он говорит: «Без них человек с любыми природными задатками не станет блаженным в государствах. Есть только этот способ, только это воспитание, только эти науки; и, будь они легки или трудны, их надо освоить, ибо не следует пренебрегать богами» (Послезаконии, 992a.). Такой человек «из многого станет единым, будет счастлив, чрезвычайно мудр и блажен» (там же, 992b).

И в *Государстве* читаем: «Начиная с двадцати пяти лет, избранные будут пользоваться в сравнении с прочими большим почетом, а наукам, порознь преподававшимся им в детстве, следует сделать общий обзор, чтобы показать их родство между собою и с природой бытия» (Государство, 5737b)[1]. Он советует сперва заниматься арифметикой, затем геометрией, третьей идет стереометрия, четвертой — астрономия, которую он называет теорией движущихся тел, и пятой — музыка. Показав, в чем заключается польза математики, он говорит: «Ты, видно, боишься, как бы не показалось, будто ты предписываешь бесполезные науки. Между тем вот что важно, хотя поверить в это и трудно: в этих науках очищается и вновь оживает некое орудие души каждого человека, которое другие занятия губят и делают слепым, а между тем сохранить его в целости важнее, нежели иметь тысячу глаз, ведь только с его помощью можно увидеть истину» (Государство, 527d).

В седьмой книге *Государства* он называет арифметику необходимейшим среди прочих искусств, разумений и знаний, включая даже военное. «Презабавным же полководцем выставляет Агамемнона Паламед в трагедиях! Он называет себя изобретателем чисел и говорит, что это именно он распределил по отрядам войско под Илионом, произвел подсчет кораблей и всего прочего, будто оно не было сосчитано, и будто Агамемнон не знал даже, сколько у него ног, раз он не умел считать» (там же, 522d). По своей природе арифметика приводит к мышлению, но только никто не пользуется ей как влекущей к бытию и побуждающей к мышлению (там же, 523a). Ведь однократное восприятие вовсе не пробуждает мысль и не возбуждает ее, и таков определенный палец, будь он толстым или тонким, длинным или коротким. А противоположные восприятия пробуждают рассудок и возбуждают его, когда одно и то же представляется большим и малым, легким и тяжелым, одним и многим (там же, 524e). Единое и число пробуждают и возбуждают рассудок, поскольку единое иногда представляется многим. Логистика и арифметика увлекают за собой и ведут к истине. Искусством счета люди должны заниматься не как

[1] У Платона говорится о двадцатилетнем возрасте.

попало, но до тех пор, пока не придут с помощью мышления к созерцанию природы чисел, и не ради того, о чем заботятся купцы и торговцы, но чтобы привести душу к истине и бытию. Оно влечет душу ввысь и заставляет рассуждать о числах самих по себе, ни в коем случае не допуская, чтобы кто-нибудь подменял их исчислимыми видимыми телами (там же, 525cd). В той же книге, по его мнению, люди, способные к вычислениям, бывают восприимчивы ко всем наукам, и даже тот, кто туго соображает, становится восприимчивее, чем был раньше (там же, 526b), и на войне это искусство полезно при разбивке лагерей, занятии местностей, стягивании и развертывании войск (там же, 526d).

Далее, обозревая науки по порядку, он говорит, что геометрия представляет собой теорию поверхностей, а астрономия — теорию движущихся тел: она с необходимостью влечет душу ввысь, прочь ото всего здешнего (там же, 529a). Там же речь идет и о музыке, поскольку при созерцании сущего необходимы две науки, астрономия и гармония: эти два знания — словно родные сестры, как утверждают пифагорейцы (там же, 530d). «Люди трудятся там бесплодно: они соизмеряют воспринимаемые на слух созвучия и голоса. Они настораживают уши, словно ловят звуки голоса из соседнего дома; и одни считают, что различают какой-то отзвук посредине, и что как раз тут находится наименьший интервал для измерения, другие же спорят с ними, уверяя, что здесь нет никакой разницы в голосах, и они ценят уши превыше ума. Они не дают струнам покоя, накручивая их на колки. Но хорошие арифметики отыскивают знание о том, какие числа созвучны, а какие нет» (там же, 531ac). Всё это пригодно для отыскания блага и красоты, а прочее нет. Любой метод, если он доходит до установления общности предметов и приводит к выводу о том, в каком отношении они близки друг к другу, будет способствовать достижению результата (там же, 531d). Таковы искусные диалектики: прочие же не способны ни ухватить, ни воспринять разумный довод. И никто не придет к этому, если он не будет руководствоваться науками: ведь путь к созерцанию сущего лежит через разумное математическое рассуждение.

В *Послезаконии* Платон вновь обращается к арифметике, называя ее даром бога, и говорит, что без нее никто не станет добродетельным. Вслед за этим он говорит: «Мы никогда не стали бы разумными, если бы исключили число из человеческой природы. Дело в том, что душа живого существа вряд ли сможет овладеть всей добродетелью в совокупности, если ее лишить разума. Ведь существу, не знакомому с тем, что такое два, три, нечет или чет, совсем неведомо число как таковое, а потому оно вряд ли сможет дать себе отчет в том, что приобретено только путем ощущений и памяти. А тот, кто лишен истинного рассуждения, никогда не станет мудрым» (Послезаконие, 977d). Если посмотреть, что говорится о прочих искусствах, станет ясно, что от них ничего не останется, если убрать арифметику. При рассмотрении искусств может возникнуть мнение, что число не так часто требуется человеческому роду; впрочем, уже и этого достаточно. Однако есть нечто божественное в зарождении и гибели, в познании богопочитания и в числе сущего, и не будучи прорицателем, трудно уяснить и понять, что причиной столь многих наших способностей является число. К примеру, очевидно, что число производит музыку посредством движений и голосов. Более того, оно выступает причиной всякого блага и никакого зла. А то, что лишено всякого числа, неисчислимо, беспорядочно, безобразно, неритмично, совершенно нестройно и плохо сочетаемо со всяким сущим. И далее он продолжает: «Никто никогда нас не уверит, что есть область добродетели, более важная для смертного племени, чем благочестие» (там же, 989b). Ведь именно через благочестие научаются остальным добродетелям. Затем он показывает, каким образом усваивается благочестие. Первая наука по порядку астрономия. Если кто боится допускать ошибки по отношению к людям, он тем более будет бояться делать ошибки и иметь ложное мнение о богах. Но ложное мнение о богах имеет тот, кто пренебрегает изучением природы чувственно воспринимаемых богов, т. е. астрономией. Ведь большинство не знает, что величайшим мудрецом по необходимости должен быть именно истинный астроном, — не тот, кто занимается астрономией, по Гесиоду, ограничиваясь наблюдением за заходом и восходом светил, но тот, кто наблюдает семь кругооборотов, а эту природу любому усмотреть нелегко (там же, 990ab). Чтобы подготовить натуры, способные к этим наукам, следует предварительно многому их научить и с детского и отроческого возраста приучить с помощью математики к настойчивому труду. Первейшим же и важнейшим является знание о числах, но не о тех, что воплощены в телах, а о порождении четного и нечетного и о том значении, которое они имеют по отношению к природе вещей. Далее можно перейти к тому, что носит весьма смешное имя, — геометрии. Это наука о том, как уподоблять на плоскости числа, по природе своей не подобные. Вслед за этим он упоминает еще одно занятие и искусство, называемое стереометрией: он говорит, что если перемножить три числа, чьи протяженные поверхности подобны либо неподобны по своей сути, то возникают твердые тела, что на самом деле удивительно и божественно(там же, 990cd).

И в *Законах* он рассуждает о музыкальных созвучиях так: «Прекраснейшим и величайшим государственным созвучием является мудрость. Ей причастен лишь тот, кто живет сообразно с разумом; а кто ее лишен, тот разрушитель своего дома и никогда не будет спасителем государства, но величайшим невеждой» (Законы, 689d).

И в третьей книге *Государства*, чтобы объяснить, что философ является также и музыкантом, он говорит: «Клянусь богами, нам точно так же не овладеть музыкой — ни нам самим, ни тем стражам, которых, как мы говорим, мы должны воспитать, пока мы повсюду не распознаем виды рассудительности, мужества, величия, щедрости и всего того, что им сродни, а также того, что им противоположно, и пока мы не заметим всего этого там, где оно существует — само по себе или в изображениях; ни в малом, ни в великом мы не станем этим пренебрегать, но будем считать, что здесь требуется то же самое — искусство и упражнение» (Государство, 402bc). Этими словами он ясно показывает полезность музыки, а также то, что только философ — настоящий музыкант, а дурной человек чужд Музам. И по сути правильно, что имеющего благой и достойный характер следует считать благоразумным, благоразумие же есть проявление благого разума, ведь оно сопровождается благообразием, ритмичностью и гармоничностью: благообразием в мелодии, гармоничностью в гармонии, ритмичностью в ритме. А злонравие, или испорченность характера, приводит к неразумию, т. е. к проявлению дурного разума, неразумие же сопровождается безобразием, неритмичностью и дисгармоничностью в порождаемом и в подражании. Так что лишь тот, кто имеет добрый нрав, — музыкант, и он же настоящий философ, как это уже было показано. Ведь музыка вселяет в душу ритмичность, гармоничность и благообразие, с самого детства проникая в нее посредством подражания и доставляя безвредное удовольствие. И он говорит, что невозможно стать совершенным музыкантом, не усвоив идей благовоспитанности, благопристойности, свободного образа мышления и рассудительности. И конечно, эти идеи содержатся во всем окружающем, в малом не менее чем в великом. А поскольку познание идей присуще философу, никто не сможет познать ничего скромного, умеренного и благообразного, если сам он будет безобразным и невоздержанным. Ведь в благообразной, размеренной и гармоничной жизни на самом деле наличествуют благообразие, уравновешенность и размеренность, и все эти чувственно воспринимаемые вещи выступают образами умозрительных идей. Вот и пифагорейцы, которым часто следует Платон, называют музыку гармонией противоположностей, единством множественного и двояким взаимным разумением. Ведь ритм и мелос не только сами упорядоченные, но и упорядочивают всю систему; и ее назначение состоит в том, чтобы объединять и согласовывать. И бог также — тот, кто согласует несогласное, и важнейшее деяние бога состоит в том, чтобы с помощью музыки и медицины делать враждебное дружественным. В музыке, по его мнению, заключается единомыслие дел, т. е. всеобщая аристократия; так что в космосе она по своей природе становится гармонией, в государстве — справедливостью, в доме — благоразумием. Она вносит порядок и единство во множественное. Энергия и польза известны в четырех частях человечности: душе, теле, доме, городе. Ведь эти четыре части должны быть слажены и упорядочены.

О математике Платон еще раз упоминает в *Государстве*: «Благой муж сохраняет правильное мнение, приобретенное образованием, и в страданиях, и в удовольствии, и в страстях, и в страхе, и никогда от него не отказывается. А с чем это схоже, я могу объяснить с помощью уподобления. Красильщики, желая окрасить шерсть в пурпурный цвет, сперва выбирают из большого числа оттенков шерсти только одну — белой окраски, затем старательно, разными приемами подготавливают ее к тому, чтобы она получше приняла пурпурный цвет, и только потом красят. Выкрашенная таким образом шерсть приобретает такую природу, что стирка, будь то со щелочью или без оной, не влияет на цвет. В противном случае, когда красят без предварительной подготовки, краска смывается, линяет и не удерживается» (там же, 429de). Точно так же следует поступать и с нашими способностями. Мы учим детей музыке, гимнастике, письму, геометрии и арифметике, не преследуя ничего иного, кроме того, чтобы они прочно усвоили целостные добродетели, восприняв их с убежденностью, словно окраску: их мнение станет прочным благодаря природным задаткам и полученному воспитанию, и эту окраску нельзя будет смыть никакими сильными щелочами — ни удовольствием, которое сильнее поташа и золы, ни скорбью, ни страхом, ни страстью, вообще ничем из едких средств (там же, 430a).

Мы можем сравнить философию с посвящением в истинные таинства и с передачей истинных мистерий. Посвящение состоит из пяти частей. Первая — *исходное очищение*: ведь к участию в мистериях допускаются не все желающие, но некоторым объявляется о запрещении — тем, чьи руки нечисты и речи безрассудны; но также и остальным нужно сначала пройти некоторое очищение. Вслед за очищением идет *передача посвящения*. Третьим будет так называемое *обозрение*. Четвертая же ступень, или цель обозрения, — *повязывание головы* и *возложение венков*, дабы посвященные могли передавать учение, быть факелоносцами, иерофантами или иными священниками. Пятая ступень венчает все предыдущие, и она состоит *в дружбе с богом* и *в благой жизни вместе с божеством*.

Таким же образом происходит и передача платоновского учения. Первым идет очищение, которое приобретается изучением с детства требуемых математических наук. По словам Эмпедокла, надо очищаться, «отсекши от пяти источников длиннолезвийной медью» (Эмпедокл, 143). И Платон говорит, что надо искать очищения в пяти математических науках, каковые суть арифметика, геометрия, стереометрия, музыка, астрономия. Посвящение состоит в передаче теорем философии, логики, политики и физики. Обозрением он называет занятие умопостигаемым, истинно сущим и идеями. Повязыванием и надеванием венков считается передача теории от усвоивших ее к другим. Пятая ступень — это совершенная и торжествующая благая жизнь, которая, согласно самому Платону, есть уподобление богу, насколько это возможно.

Можно распространяться о полезности и необходимости математических наук гораздо больше, чем здесь. Но чтобы не подумали, что я чрезмерно восхваляю занятия математикой, я перейду к передаче того необходимого, что касается математических теорем, нужных читателю, чтобы стать совершенным знатоком арифметики, геометрии, музыки и астрономии. И поскольку читателей Платона влечет к себе в первую очередь другое, я постараюсь сообщить достаточное для понимания его писаний. Ведь он и сам не хотел, чтобы мы до старости лет чертили фигуры или музицировали, ведь эти науки приличествуют скорее детям, и они предназначены для подготовки и очищения души, дабы она смогла воспринять философию. Тот, кто хотел бы приступить к нашим писаниям или сочинениям Платона, должен прежде всего ознакомиться хотя бы с первыми элементами геометрии: тогда ему будет легче понимать наши объяснения. Однако сказанное нами поймут и те, кто никогда не занимался математикой.

Арифметика

О порядке изучения математики

Мы начнем с запоминания арифметических теорем, связанных с музыкальными числовыми теоремами. Мы не нуждаемся при этом ни в каких музыкальных инструментах, как это разъяснил сам Платон, сказав, что нет никакой нужды дергать за струны, как это делают «охотники за слышимыми звуками». Надо стремиться к тому, чтобы понять космическую гармонию и музыку, а она познается не иначе, как через предварительное созерцание чисел. Когда Платон помещает музыку на пятое место, он говорит о космической музыке, которая состоит в движении, порядке и созвучии перемещающихся звезд. Но нам следует поставить ее на второе место после арифметики, что согласуется и с самим Платоном, поскольку никто ничего не поймет в космической музыке, пока не разберется с умопостигаемой музыкой, воплощенной в числах. И поскольку числовая теория музыки тесно связана с чистой теорией чисел, мы поставим ее на второе место, чтобы облегчить ее изучение.

Первой по природе идет теория чисел, так называемая арифметика. Второй — теория плоских поверхностей, так называемая геометрия. Третья, стереометрия, имеет дело с телами. Четвертая — с движущимися телами, и это будет астрономия. А музыка рассматривает связанные между собой движения и интервалы, и мы не сможем ее понять, если прежде не усвоим то, что касается чисел. Следуя нашему плану, мы рассмотрим числовую теорию музыки сразу после арифметики; однако в природном порядке музыкальная теория космической гармонии стоит на пятом месте.

Одно и единица

Согласно пифагорейскому преданию, числа — начало, источник и корень всего. Число есть собрание единиц, или начинающееся с единицы восхождение множеств и заканчивающееся на единице нисхождение. Единица же представляет собой предельное количество (начало и элемент числа), которое, будучи удалено из множества посредством отнятия и изолировано от него, остается одиноким и неизменным: ведь его дальнейшее рассечение невозможно. Если мы разделим чувственно воспринимаемое тело на части, по количеству оно станет из одного многим, и если каждую часть продолжать делить, все окончится на *одном*; и если мы далее разделим *одно* на части, эти части произведут множество, и деление частей снова окончится на *одном*. Ведь *одно* не имеет частей, оно неделимо. И всякое число при разделении уменьшается и разделяется на части, меньшие его самого; к примеру, 6 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1. Если среди чувственно воспринимаемых вещей *одно* делится, оно уменьшается телесно и разделяется на части меньшие, нежели оно само, но по числу оно увеличивается: ведь *одно* производит многое. И выходит, что *одно* — неделимое. Ведь ничто не разделяется на части, которые были бы больше его самого. А *одно* делится на части, которые больше целого, поскольку деление происходит в числах, и равны целому. К примеру, если чувственно воспринимаемую единицу разделить на шесть частей, то эти части по числу будут равны целому: 1 1 1 1 1 1, и они будут больше целого, если разделить ее на числа 2 и 4, ведь числа 2 и 4 больше *одного*. И в качестве числа единица неделима. А называется она единицей, ибо она неизменна и не выходит за пределы своей природы. Ведь если ее умножить на единицу, получится единица, единожды одно — это одно, и такое умножение на единицу будет давать единицу до бесконечности. И еще она называется единицей, потому что получается удалением и отделением от численного множества. Но как число отличается от счислимого, так единица от *одного*. Число есть умопостигаемое количество, к примеру 5 как таковое и 10 как таковое бестелесное и не воспринимаемое чувствами, но одним лишь умом. Счислимое же есть чувственно воспринимаемое количество — 5 лошадей, 5 быков, 5 человек. Единица умопостигаема идеей *одного*, и она неделима; а *одно* воспринимаемо чувствами, и о нем говорят как об *одном*: одна лошадь, один человек.

Началом чисел является единица, а началом счислимого — *одно*. И *одно*, будучи чувственно воспринимаемым, может быть делимо до бесконечности, не как число и начало чисел, но как чувственно воспринимаемое. А умопостигаемая единица по своей сути неделима, в отличие от чувственно воспринимаемого *одного*, делимого до бесконечности. Счислимые предметы также отличаются от чисел, ведь первые телесны, а вторые бестелесны. С наивной точки зрения ближайшими началами числа считались единица и двойка; согласно пифагорейцам, таковы идущие друг за другом по порядку пределы, мыслимые как нечетное и четное, и тройка — это началом чувственно воспринимаемых трех, четверка — четырех, и так для всех чисел. А еще они заявляют, что единица — начало всех этих чисел, и что *одно* в числах свободно от изменений, будучи только *одним*, и оно не отличается от другого *одного* по количеству, как сами по себе *одни*. И поэтому оно становится началом и мерой того, что существует само по себе; и всякое сущее называется *одним*, будучи причастным к первичной сущности и идее *одного*. Архит и Филолай говорили об *одном* и о единице, не различая их, так что они называли единицу *одним*. Многие называют единицу саму по себе первой единицей, как будто бывают не первые единицы, и будто такие единица и *одно* — более общее (они говорят и об *одном*), и будто бы она первая и умопостигаемая сущностью *одного*, делая все прочие вещи *одним*: каждое из них по причастности к единице называется *одним*. И поэтому имя «одно» как таковое не обнаруживается ни в каком роде, но прилагается ко всем. Так что единица и *одно*, будучи и умопостигаемыми и чувственно воспринимаемыми, совсем не отличаются друг от друга.

Другие отмечают иное различие между единицей и *одним*. Ведь *одно* не меняется по сути, и не выступает причиной изменения сущности единицы и нечётных чисел, и оно не меняется ни качественно, ибо оно уже является единицей, а единиц может быть много, ни по количеству, в отличие от единиц, к которым может быть присоединена другая единица. Ведь оно — *одно*, а не многое, вот оно и называется *одним*-единственным. И хотя Платон в Филебе говорит об «одницах» (Филеб, 15а), но это сказано не об одном, а об *однице*, которая есть единица, причастная *одному*. И во всем неизменяемое *одно* служит определением единицы. И одно отличается от единицы, поскольку оно определено и ограничено, а единицы безграничны и беспредельны.

Чётные и нечётные числа

Числа первым делом подразделяются на два [рода]: одни называются чётными, а другие — нечётными. И чётные суть те, которые делятся на две равные половины, и таковы двойка и четверка, а нечётные делятся только на неравные, каковы 5 или 7. Одни говорят, что единица — первое нечётное число. Ведь чётное противоположно нечётному, и единица должна быть чётной либо нечётной; но она не может быть чётной, поскольку не делится на равные, ибо не делится вообще; следовательно, единица является нечётной. И если к чётному прибавить чётное, всегда получится чётное; но единица, прибавленная к чётному, всегда производит нечётное, стало быть, она вновь окажется не чётной, но нечётной.

Однако Аристотель в *Пифагорейце* говорит, что *одно* причастно обеим природам. В самом деле, прибавленная к нечётному числу, она производит чётное, а к чётному — нечётное, и оно не могло бы делать этого, не будучи причастным обеим природам; поэтому *одно* называют чётно-нечётным. Так же считает и Архит. Единица является первой идеей нечётного, и в космосе нечётное сопряжено с определенным и правильным. А первой идеей чётного является неопределенная двойка, и в космосе чётное сопряжено с неопределенным, непонятным и беспорядочным. А двойка называется неопределенной, в отличие от определенной единицы. Пусть имеются последовательные члены, идущие за единицей с одинаковым возрастанием в единицу, так что каждый следующий превосходит предыдущий на единицу. В этом случае отношение соседних членов постоянно уменьшается. Пусть будут числа 1 2 3 4 5 6: отношение двойки к единице будет двукратным, тройки к двойке — полуторным, четверки к тройке — сверхтретьим, пятерки к четверке — сверхчетвертным, шестерки к пятерке — сверхпятерным. И сверхпятерное отношение меньше сверхчетвертного, сверхчетвертное — сверхтретьего, сверхтретье — полуторного, полуторное — двукратного. И для прочих чисел отношение ведет себя так же. И можно наблюдать, как числа одно за другим будут чётными и нечётными.

Первые или несоставные числа

Некоторые числа называются первыми вообще и несоставными, некоторые — первыми между собой, но не вообще, некоторые — составными вообще, некоторые — составными между собой. Первыми вообще и несоставными называются те, которые измеряются не числом, но одной лишь единицей, каковы 3, 5, 7, 11, 13, 17 и подобные им. Их называют также линейными и измеряющими прямую, потому что длины и линии рассматриваются в теории как одномерные. О них же говорится как о нечётно-нечётных. Тем самым они называются пятью именами: первые, несоставные, линейные, измеряющие прямую, нечётно-нечётные. И они измеряются только единицей. Ведь три не измеряется никаким числом и не является кратным никакому числу, кроме единицы: единожды три — это три. Так и $1 \times 5 = 5$, $1 \times 7 = 7$, $1 \times 11 = 11$. Поэтому они называются нечётно-нечётными: ведь и сами они в качестве результата измерения нечётные, и измеряющая их единица тоже нечётная. Поэтому первые и несоставные числа бывают только нечётными. Ведь чётные числа не являются ни простыми, ни несоставными, и измеряются они не только единицей, но и другими числами: четыре — двумя двойками, ведь $2 \times 2 = 4$; шесть — двойкой и тройкой, ведь $2 \times 3 = 6$ и $2 \times 2 = 6$; и прочие чётные числа, за исключением двойки, измеряются числами, большими единицы. И лишь одна двойка в этом отношении подобна нечётным числам, ибо она измеряется только единицей:

$1 \times 2 = 2$. Поэтому говорят, что она схожа по виду с нечётными числами.

Первыми между собой называются числа, не имеющий иной общей меры, кроме единицы, даже если сами они измеряются другими числами. Так 8 измеряется числами 2 и 4, 9 — числом 3 и 10 — числами 2 и 5. И они в качестве общей меры и между собой, и для своих первых имеют только единицу. Ведь и $1 \times 3 = 3$, и $1 \times 8 = 8$, и $1 \times 9 = 9$, и $1 \times 10 = 10$.

Составные числа

Составными называются числа, которые измеряются числами меньшими, нежели они сами. Так 6 измеряется двойкой и тройкой. Составными между собой называются те, что имеют общую меру: таковы 8 и 6, ведь их общая мера — двойка, ибо $2 \times 3 = 6$ и $2 \times 4 = 8$. И таковы 6 и 9, ведь их общая мера — три, ибо $3 \times 2 = 6$ и $3 \times 3 = 9$. А единица — не число, но начало числа, равно как и неопределенная двойка, первая отличная от единицы и не имеющая меры большей, чем единица. Составные, охватываемые двумя множителями, называются плоскими, ибо в теории они рассматриваются как имеющие два протяжения и охватываемые длиной и шириной, а если множителей три, числа называются телесными, так как в них появляется третье протяжение. А числа, полученные перемножением этих видов, называются превышающими.

Разновидности чётных чисел

Среди чётных чисел имеются чётно-чётные, нечётно-чётные и чётно-нечётные.

Чётно-чётные числа характеризуются тремя признаками: во-первых, они получаются перемножением двух чётных чисел; во-вторых, все их части, следующие за единицей, — чётные; в-третьих, ни одна их часть не одноименна с нечётным числом. Таковы числа 32, 64, 128 и вообще те, что идут в прогрессии удвоения. Действительно, 32 получается из 4 и 8, и они чётные; и все его части чётные, половина 16, четверть 8, восьмая 4; и все части одноименны с чётными числами, ведь половине соответствует двойка, и то же самое для четверти и восьмой. Это соотношение подходит и к прочим подобным числам.

Чётно-нечётные числа суть те, которые измеряются двойкой и нечётными числами, и после первого деления пополам их половины имеют только нечётные меры. К примеру, дважды 7 есть 14. Они называются чётно-нечётными, потому что измеряются чётной двойкой и нечётными числами: два измеряется одним, шесть измеряется тремя, десять измеряется пятью, четырнадцать измеряется семью. После первого деления пополам из них образуются нечётные числа, и за первым делением на равные части больше таких делений нет. Так половиной 6 будет 3, и 3 не делится на равные части: ведь единица неделима.

Нечётно-чётные числа суть те, которые получаются перемножением двух чисел, одно из которых нечётное, а другое чётное, которое делится на две равные чётные части, а при следующем делении пополам этих чётных частей получаются нечётные числа. Таковы 12 и 20; ведь $3 \times 4 = 12$ и $5 \times 4 = 20$; и 12 делится пополам на 6 и 6, и натрое 4 и 4 и 4, и начетверо, поскольку оно есть 4×3; а 20 пополам будет 10, начетверо — 5, на пять частей — 4.

Равно-равные, гетеромекные и параллелограммические числа

Среди составных чисел имеются равно-равные, каковые суть квадратные и плоские, получающиеся от перемножения двух равных чисел (и результат есть равно-равное или квадрат). Так, $4 = 2 \times 2$ и $9 = 3 \times 3$. А неравно-неравные получаются при перемножении неравных чисел. Таковым будет 6, поскольку $2 \times 3 = 6$.

Среди последних гетеромекными называются числа, у которых одна сторона на единицу больше другой. Но на единицу различаются нечётное и чётное число, так что все гетеромекные числа чётные. Началом всех чисел служит единица; и она, будучи нечётной, при удвоении дает гетеромекную двойку. И вот двойка, гетеромекная по своей сути и отстоящая от единицы на единицу, порождает чётные числа, а они превосходят нечётные на единицу и вместе с ними производят гетеромекные числа.

Производят же они их двояко, умножением и сложением. Сложением последовательных чётных чисел гетеромекные числа получаются так. Возьмем по порядку чётные числа 2 4 6 8 10 12 14 16 18. Последовательное сложение дает $2 + 4 = 6$, $6 + 6 = 12$, 12 + 8 = 20, 20 + 10 = 30. Так получаются гетеромекные числа 6 12 20 30. И далее действует этот же принцип (λόγος).

Те же гетеромекные числа получаются умножением последовательных чётного и нечётного чисел, предыдущего на последующее. Возьмем числа 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10. И вот $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $4 \times 5 = 20$, $5 \times 6 = 30$. Далее действует этот же принцип. Эти числа называются гетеромекными, потому что добавление единицы к одной из сторон производит первое различие сторон.

Параллелограммическое число есть такое, у которого одна сторона превосходит другую на две единицы. Таковые суть 2×4, 4×6, 6×8, 8×10, что дает 8 24 48 80.

Квадратные числа получаются сложением последовательных нечётных чисел. Пусть будут последовательные нечётные числа 1 3 5 7 9 11. И вот $1 + 3 = 4$, и это число является квадратным и равно-равным, ведь $2 \times 2 = 4$; $4 + 5 = 9$, и оно тоже квадратное, ведь $3 \times 3 = 9$; $9 + 7 = 16$, и оно тоже квадратное, ведь $4 \times 4 = 16$; $16 + 9 = 25$, и оно тоже квадратное и равно-равное, ведь $5 \times 5 = 25$. И далее выполняется такой же принцип. Таково получение квадратных чисел сложением, когда нечётные числа, следующие за единицей, производят квадратные числа при их сложении. А через умножение они получаются, когда любое число умножается само на себя: $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $4 \times 4 = 16$.

Для всех последовательных квадратных чисел средними между ними в геометрической пропорции выступают гетеромекные числа (т. е. те, у которых одна сторона больше другой на единицу); но для последовательных гетеромекных чисел квадратные числа не являются средними пропорциональными. Пусть будут числа 1 2 3 4 5. Каждое из них при умножении на самого себя производит квадрат: $1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $4 \times 4 = 16$, $5 \times 5 = 25$. Они не выходят из своих пределов: ведь двойка удваивается, и тройка утраивается... И последовательные квадраты суть 1 4 9 16 25. А средними между ними будут гетеромекные числа. Два последовательных квадрата суть 1 и 4, и среднее между ними есть 2. В прогрессии 1 2 4 среднее 2 так же относится к предшествующему, в каком отношении к нему находится последующее. Ведь 2 — двойная к единице, и 4 к 4 тоже. И опять пусть будут квадраты 4 и 9, средним между ними будет гетеромекное число 6. В прогрессии

4 6 9 среднее 6 так же относится к предшествующему, в каком отношении к нему находится последующее. Ведь 6 — полуторное к 4, и 9 к 6 тоже. И далее выполняется такой же принцип.

Что касается гетеромекных чисел, получающихся перемножением сомножителей, разнящихся на единицу, они и не остаются в собственных пределах, и не охватывают квадратов. Вот $2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $4 \times 5 = 20$; и ни они из сомножителей не остается в собственных границах, но они изменяются при перемножении, двойка в тройку, тройка в четверку, четверка в пятерку. Далее, получившиеся гетеромекные числа не охватывают квадратных чисел. Пусть будут последовательные гетеромекные числа 2 и 6, и между ними по порядку находится квадратное число 4. Но оно не охватывается ими пропорционально, образуя одинаковые отношения с крайними. Возьмем по порядку 2 4 6: и четверка производит различные отношения с краями, ведь 4 к 2 будет двойным, а 4 к 6 — полуторным. Ну а среднее пропорциональное таково, что первое имеет такое же отношение к среднему, какое среднее к третьему. И так же по порядку между гетеромекными числами 6 и 12 находится квадратное число 9. Но и оно не обнаруживает равных отношений с краями в порядке 6 9 12: ведь 9 к 6 будет полуторным, а 12 к 9 — сверхтретьим. И далее выполняется такой же принцип.

Продолговатые числа

Продолговатое число есть такое, которое образуется перемножением двух неравных чисел, которые различаются на единицу, двойку или любую другую разницу, каково число $24 = 6 \times 4$, и другие. Продолговатые числа содержат в себе три части. Продолговатые — все гетеромекные числа, поскольку их стороны таковы, что одна из них больше другой. Но обратное неверно, и не все продолговатые числа являются гетеромекными: ведь когда одна сторона превышает другую более чем на единицу, это будет продолговатое число, но не гетеромекное; гетеромекное же число есть такое, у которого одна сторона больше другой на единицу. Таково число 6, поскольку $2 \times 3 = 6$. Число будет также продолговатым, когда его стороны при разных перемножениях различаются и на единицу, и больше чем на единицу. Таково число 12, ведь это и

3 × 4, и 2 × 6, и если его представить как 3 × 4, оно будет гетеромекным, а если как 2 × 6, оно будет продолговатым. И еще бывают такие продолговатые числа, у которых при любом перемножении одна сторона превышает другую более чем на единицу. Таково число 40, которое есть и 4 × 10, и 5 × 8, и 2 × 20. Такие числа называются только продолговатыми. Гетеромекное же число является первым искажением числа, образованного равными числами; первое же искажение есть добавление единицы к одной из сторон. И поэтому числа, получающиеся первым искажением сторон, по праву называются гетеромекными. Но те числа, у которых одна сторона количественно превышает другую более чем на единицу, из-за такого различия длин называются продолговатыми.

Плоские числа суть такие, которые получаются перемножением двух чисел — длины и ширины. Среди них имеются треугольные числа, квадратные, пятиугольные и далее многоугольные по порядку.

Треугольные и многоугольные числа

Треугольные числа порождаются следующим способом. Прежде всего последовательно складываемые чётные числа производят последовательные гетеромекные числа. Вот первое чётное число 2, и оно гетеромекное, ведь оно равно 1 × 2. Если к двум прибавить 4, получится 6, и оно тоже гетеромекное, ведь оно равно 2 × 3. И так до бесконечности по такому же принципу. Чтобы прояснить сказанное, мы продемонстрируем его следующим образом. Первая двойка есть дважды записанная альфа:

α α

Эта схема гетеромекная: ведь по длине она равна двум, а по ширине одному. За двумя идет чётное число 4. И если мы возьмем две первые альфы и затем охватим 4 вокруг 2, получится гетеромекная схема 6: ведь ее длина равна трем, а ширина 2. За 4 идет чётное число 6. Охватив им первые 6, получим 12, и когда оно охватывает имевшееся, получается гетеромекная схема, которая имеет длину 4 и ширину 3. И далее чётные складываются по тому же принципу.

α α α   α α α α
α α α   α α α α
          α α α α

Напротив, последовательно складываемые нечётные числа производят квадратные числа. Возьмем последовательные нечётные числа 1 3 5 7 9 11. Складываемые последовательно, они производят квадратные числа. Вот первое нечётное число 1, и оно равно 1 × 1. Следующим нечётным будет 3. И если его как гномон приложить к одному, получится квадратное равно-равное, ведь оно равно 2 по длине и 2 по ширине. Следующим нечётным будет 5. И если его как гномон приложить к квадратному числу 4, получится квадратное 9, ведь оно равно 3 по длине и 3 по ширине. Следующим нечётным будет 7. И если его приложить к 9, получится 16, которое равно 3 по длине и 3 по ширине. И далее по тому же принципу.

α α   α α α   α α α α
α α   α α α   α α α α
        α α α   α α α α
                  α α α α

А если последовательно складывать не одни только чётные или одни только нечётные, но чётные и нечётные, то будут получаться треугольные числа. Расположим по порядку нечётные и чётные: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10. Из них составлением получаются треугольные числа. Первой идет единица: и она, не столько в действительности, как в возможности, представляет собой по сути начало всех чисел. Если к ней приставить следующую по порядку двойку, получится треугольное число 3. Если приставить 3, получится 6; если приставить 4, получится 10; если приставить 5, получится 15; если приставить 6, получится 21; если приставить 7, получится 28; если приставить 8, получится 36; если приставить 9, получится 45; если приставить 10, получится 55; и далее до бесконечности по тому же принципу. То, что эти числа треугольные, становится ясным на схеме, где к уже имеющимся числам прибавляются последовательные гномоны. И этим прибавлением получаются треугольные числа 3 6 10 15 21 28 36 45 55.

1	3	6	10	15	21
α	α	α	α	α	α
	α α	α α	α α	α α	α α
		α α α	α α α	α α α	α α α
			α α α α	α α α α	α α α α
				α α α α α	α α α α α
					α α α α α α

28	36
α	α
α α	α α
α α α	α α α
α α α α	α α α α
α α α α α	α α α α α
α α α α α α	α α α α α α
α α α α α α α	α α α α α α α
	α α α α α α α α

А за ними по порядку идут 45 и 55.

Как сказано выше, квадратные числа получаются при сложении последовательных нечётных чисел, начиная с единицы. И так получается, что они попеременно чётные и нечётные, потому что все числа по очереди являются чётными и нечётными: таковы 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100. И когда чётные и нечётные числа выстроены по порядку за единицей, так получается, что гномоны, из которых составляются квадратные числа, превосходят друг друга на двойку, как уже было показано. А превосходящие друг друга на двойку, начиная с единицы, являются нечётными. Подобным образом из чисел, идущих от единицы с разностью в тройку, при сложении получаются пятиугольные числа, с разностью в четверку — шестиугольные, и всегда разность гномонов, из которых получается многоугольник, на двойку меньше числа углов.

В многоугольных числах имеется и другой порядок, связанный с умножением чисел, начиная с единицы. Ведь когда идущие за единицей числа образуются умножением (т. е. удвоением, утроением и так далее), то когда число умножается на себя один раз, всегда получаются квадратные числа; когда оно умножается на себя дважды, всегда получаются кубы; когда умножается на себя пять раз, получаются кубы и квадраты, причем стороны кубов —

это квадратные числа, а стороны квадратов — кубические числа. И то, что при умножении чисел, начиная с единицы, на себя получаются квадратные числа, при двукратном умножении — кубы, при пятикратном — кубы и квадраты, мы покажем так. Рассмотрим последовательные числа 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25. Среди них первое удвоенное есть 2. За ним идет 4, квадратное. За ним идет 8, кубическое. За ним идет 16, квадратное. За ним идет 32. За ним идет 64, и квадратное, и кубическое. За ним идет 128. За ним идет 256, квадратное. И далее до бесконечности по тому же принципу. И при умножении на три обнаруживается такое же чередование квадратов, и при умножении на пять, и при любом следующем умножении. Таким же образом обнаруживается, что члены умножения через два — это кубы, а через 5 — кубы и квадраты.

И квадратам присуще то, что все они либо делятся на три, либо делятся на три после отнятия единицы; и они же либо делятся на четыре, либо делятся на четыре после отнятия единицы. И они либо после отнятия единицы делятся на три, а без отнятия делятся на 4, каково число 4; либо после отнятия единицы делятся на четыре, а без отнятия на 3, каково число 9; либо делятся и на три, и на четыре, каково число 36; либо не делятся ни на три, ни на четыре, но после отнятия единицы делятся и на три, и на четыре, каково число 25.

И одни числа являются равно-равными и квадратными, а другие неравно-неравными, гетеромекными или продолговатыми, и плоские получаются из двух сомножителей, а телесные из трех. И числа называют плоскими, треугольными, квадратными, телесными и иными именами не в собственном смысле, но по сходству с пространством, которое они измеряют. Так, 4 измеряет квадратное пространство и потому называется квадратным, и 6 по этой же причине называется гетеромекным.

Среди плоских чисел все квадраты подобны друг другу, а из гетеромекных[2] подобны те, которые охватываются сторонами, образующими пропорцию. Пусть будет гетеромекное число 6, его стороны суть длина 3, ширина 2. Другое плоское число пусть будет 24, его стороны суть длина 6, ширина 4. И как длина к длине,

[2] Явная оговорка — должно быть «продолговатые».

так и ширина к ширине; ведь как 6 : 3, так и 4 : 2. Поэтому плоские числа 6 и 24 — подобные. Такие числа могут изображаться как стороны, когда они вытянуты в длину, или как плоские, когда они получаются перемножением двух чисел, либо как телесные, когда они получаются перемножением трех чисел.

Среди телесных чисел все кубы подобны друг другу, а из прочих те, стороны которых образуют пропорцию, когда длина к длине, как ширина к ширине, как глубина к глубине.

Первым плоским и многоугольным числом будет треугольное, как первая плоская прямолинейная фигура есть треугольник. Его порождение рассматривалось выше, когда к первому числу последовательно прибавлялись чётные и нечётные числа. И все такие последовательные числа, образуют ли они треугольники, квадраты или другие многоугольники, называются гномонами. И стороны любого треугольного числа всегда имеют столько единиц, сколько гномонов было составлено вместе. Первой идет единица, о которой говорится как о треугольнике, не в действительности, но в возможности: будучи семенем всех чисел, она содержит в себе и треугольную возможность. Прибавленная к ней двойка порождает треугольник, стороны которого содержат столько единиц, сколько гномонов составлялось вместе, т. е. две. И весь треугольник содержит столько единиц, сколько их в составленных вместе гномонах. Ведь один и гномон-два вместе дают 3, и треугольник состоит из трех единиц, а каждая сторона — из двух, сколько гномонов было составлено вместе. К треугольнику 3 прибавляется гномон 3, что на двойку больше единицы, и в результате получается треугольник 6. Его стороны содержат столько единиц, сколько гномонов было составлено вместе, поскольку 1 + 2 + 3 = 6. К треугольнику 6 прибавляется 4, что дает треугольник 10, каждая сторона которого содержит 4 единицы. Ведь прибавленный гномон равен 4, и целое состоит из четырех гномонов, 1 + 2 + 3 + 4. К треугольнику 10 прибавляется 5, что дает треугольник 15, каждая сторона которого содержит 5 единиц. И он состоит из 5 гномонов. Подобным образом из гномонов <...> получаются гномические числа.

Некоторые числа называются круговыми, сферическими и возвратными. Таковы те, которые при плоскостном или телесном перемножении, согласно двум или трем протяжениям, возвращаются к первоначальному числу. Таков и круг, который возвращается к начальной точке: ведь он охватывается одной линией, которая откуда начинается, там и оканчивается. Такова и телесная сфера: ведь кру́гом охватывается сторона, и при очерчивании сферы начало совпадает с концом. И числа, которые при умножении заканчиваются на самих себе, называются круговыми и сферическими. Таковы 5 и 6. Ведь $5 \times 5 = 25$, $5 \times 25 = 125$; и $6 \times 6 = 36$, $6 \times 36 = 216$.

Как сказано, квадратные числа порождаются суммированием нечётных чисел, идущих от единицы с увеличением на два. Ведь $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9$, $9 + 7 = 16$, $16 + 9 = 25$.

1	4	9	16	25
α	α α	α α α	α α α α	α α α α α
	α α	α α α	α α α α	α α α α α
		α α α	α α α α	α α α α α
			α α α α	α α α α α
				α α α α α

Пятиугольные числа суть те, которые получаются суммированием чисел, идущих от единицы с увеличением на три. Их гномоны суть 1 4 7 10 13 16 19; а сами пятиугольные числа равны 1 5 12 22 35 51 70 и так далее. Схематически пятиугольные числа изображаются так:

1	5	12	22	35
α	α	α	α	α
	α α	α α	α α	α α
	α α	α α α	α α α	α α α
		α α α	α α α α	α α α α
		α α α	α α α α	α α α α α
			α α α α	α α α α α
			α α α α	α α α α α
				α α α α α
				α α α α α

Шестиугольные числа суть те, которые получаются суммированием чисел, идущих от единицы с увеличением на четыре. Их гномоны суть 1 5 9 13 17 21 25; а сами шестиугольные числа равны

1 6 15 28 45 66 91 и так далее. Схематически шестиугольные числа изображаются так:

```
1           6             15                28                   45
α           α              α                 α                    α
          α   α          α   α             α   α                α   α
          α   α        α   α   α         α   α   α            α   α   α
            α          α   α   α       α   α   α   α        α   α   α   α
                       α   α   α       α   α   α   α      α   α   α   α   α
                         α   α         α   α   α   α      α   α   α   α   α
                           α           α   α   α   α      α   α   α   α   α
                                         α   α   α        α   α   α   α   α
                                           α   α          α   α   α   α   α
                                             α              α   α   α   α
                                                              α   α   α
                                                                α   α
                                                                  α
```

Семиугольные числа суть те, которые получаются суммированием чисел, идущих от единицы с увеличением на пять. Их гномоны суть 1 6 11 16 21 26; а сами семиугольные числа равны 1 7 18 34 55 81. Подобным же образом восьмиугольные числа суть те, которые получаются суммированием чисел, идущих от единицы с увеличением на шесть; девятиугольные числа суть те, которые получаются суммированием чисел, идущих от единицы с увеличением на семь; десятиугольные числа суть те, которые получаются суммированием чисел, идущих от единицы с увеличением на восемь.

И вообще для всех многоугольных чисел, если отнять две единицы от количества углов, то получится та разность, которую имеют между собой числа, из которых складывается многоугольное число.

Сумма двух последовательных треугольников будет квадратом: $1 + 3 = 4$, $3 + 6 = 9$, $6 + 10 = 16$, $10 + 15 = 25$, $15 + 21 = 36$, $21 + 28 = 49$, $28 + 36 = 64$, $36 + 45 = 81$. И следующие треугольники при сложении также дают квадрат, подобно тому, как в линиях треугольные фигуры складываются в квадратную.

Телесные и пирамидальные числа

Среди телесных чисел одни имеют равные стороны (когда перемножаются три равных числа), другие — неравные. Среди последних у одних все стороны неравны, у других две равны, а третья нет. И там, где две равны, третья может быть больше или меньше. Когда все стороны равны, равно-равно-равные числа называются кубами. Когда все стороны неравны, неравно-неравно-неравные числа называются «алтарями». Когда две стороны равны, а третья сторона меньше этих двоих, равно-равно-уменьшенные числа называются «плитками». И когда две стороны равны, а третья сторона больше этих двоих, равно-равно-увеличенные числа называются «балками».

Пирамидальные числа суть те, которыми измеряются пирамиды и усеченные пирамиды. Усеченная пирамида есть та, у которой отрезана вершина. Некоторые говорят также о трапециях, схожих с плоскими трапециями; ведь трапецией называется фигура, получаемая из треугольника при отсечении вершины прямой линией, параллельной основанию.

Сторонние и диагональные числа

Подобно тому как числа потенциально имеют отношения треугольные, четырехугольные, пятиугольные и соответствующие прочим фигурам, так мы могли бы найти сторонние и диагональные отношения, обнаруживающиеся у чисел в соответствии с семенными отношениями, ибо по ним упорядочиваются фигуры. А так как над всеми фигурами согласно наивысшему и семенному отношению начальствует единица, то и отношение диагонали к стороне отыскивается в единице. Возьмем две единицы; положим, что одна из них есть диагональ, другая же — сторона, ибо единица, будучи началом всех вещей, потенциально должна быть и стороной и диагональю. И пусть к стороне прибавляется диагональ, а к диагонали две стороны, ибо сколько дважды дает в квадрате сторона, столько один раз диагональ. Теперь большее становится диагональю, а меньшее стороной. При первой стороне и диагонали квадрат единицы-диагонали на одну единицу меньше, чем дважды взятый квадрат единицы-стороны; ведь единицы находятся в равенстве, и единое на одну единицу меньше, чем двойное. Прибавим к стороне диагональ, т. е. к единице единицу; итак, сторона будет 2 единицы; к диагонали же прибавим две стороны, т. е. к единице две единицы; диагональ будет 3 единицы. Квадрат стороны будет 4, а квадрат диагонали будет 9; и 9 на единицу больше, чем дважды взятое 4. Снова прибавляем к стороне 2 диагональ 3; сторона будет 5; а к диагонали 3 две стороны, т. е. два раза по 2; диагональ будет 7. Квадрат стороны будет 25, а квадрат диагонали будет 49; и 49 на единицу меньше, чем двукратно взятое 25. Снова к стороне прибавьте диагональ 7; будет 12; к диагонали 7 прибавьте дважды взятую сторону 5; будет 17. И квадрат 17 на единицу полнее, чем двукратно взятый квадрат от 12. И от дальнейшего прибавления, происходящего таким образом, будет происходить подобная же смена: двукратно взятый квадрат стороны то на единицу меньше, то на единицу больше, чем квадрат диагонали; при этом стороны и диагонали рациональны. И квадраты диагоналей попеременно то на единицу больше удвоенных квадратов сторон, то на единицу меньше. Все квадраты диагоналей — двойные по отношению к квадратам сторон, и они попеременно то больше их, то меньше на одну и ту же единицу. И в своем размеренном появлении они производят равенство, так что не возникает ни избытка, ни недостатка в сравнении с двойным. Ведь если в первом квадрате диагонали имелся недостаток, то в следующем за ним будет избыток.

Совершенные числа

Далее, среди чисел одни называются совершенными, другие — избыточными, третьи — недостаточными. И совершенные числа суть те, которые равны всем своим частям, каково число 6: ведь его половинная часть равна 3, треть — 2, шестая — 1, и составленные вместе, они дают 6. Порождаются совершенные числа следующим образом. Если мы будем складывать числа в прогрессии удвоения, начиная с единицы, и в сумме получим простое и несоставное число, и затем умножим сумму на последнее слагаемое, в результате получится совершенное число. Пусть будут числа в прогрессии удвоения 1 2 4 8 16. Сложив 1 и 2, получим 3. Если умножить 3 на последнее прибавленное число 2, получится 6, первое совершенное число. Теперь сложим три числа в прогрессии удвоения, 1 + 2 + 4 = 7. Если умножить 7 на последнее прибавленное число 4, получится 28, второе совершенное число. Действительно, его половина равна 14, четверть — 7, седьмая часть — 4, четырнадцатая — 2, двадцать восьмая — 1.

Избыточные числа суть те, у которых сумма частей больше целого, каково число 12. Его половина равна 6, треть — 4, четверть — 3, шестая часть — 2, двенадцатая — 1. И составленные вместе, они дают 16, что больше исходных 12.

Недостаточные числа суть те, сложенные вместе части которых производят число, меньшее исходного. Таково число 8. Его половина равна 4, четверть — 2, восьмая часть — 1. Таково же и число 10, которое пифагорейцы называли совершенным совсем по другой причине, о чем будет сказано в своем месте.

Совершенным называют и число 3, потому что оно первое имеет начало, середину и конец. И оно является линией и поверхностью. Ведь равносторонний треугольник имеет стороны по две единицы каждая. И оно является первой связью и возможностью телесного, ведь телесное мыслится имеющим три протяжения.

Музыка

Введение

Уже было сказано, что имеются созвучные числа, и что принцип созвучий не отыскивается нигде, помимо арифметики. И созвучие имеет величайшую силу: в рассуждении это истина, в жизни — счастье, в природе — гармония. И эта космическая гармония не будет найдена, если ее первым делом не раскрыть в числах. Она постижима умом, и умом она воспринимается легче, нежели чувствами. Мы будем говорить об обеих гармониях, чувственно воспринимаемой в инструментах и умопостигаемой в числах. Завершив трактат о математических науках, мы составим трактат о космической гармонии, без колебаний ссылаясь на то, что было открыто нашими предшественниками, и прежде всего на пифагорейскую традицию, обращаясь к переданному ими и не претендуя ни на какие открытия. Желая показать тем, кто будет изучать Платона, прежде всего то, что передано нам предшественниками, мы сочли необходимым составить этот обзор.

Фрасилл, обсуждая чувственно воспринимаемую гармонию инструментов, определил голос как напряжение энгармоничного звука. О звуке говорят как об энгармоничном, когда он делается выше при повышении и ниже при понижении, будучи чем-то средним. Если мы помыслим звук, который будет выше всех прочих звуков, он не будет энгармоничным, и по этой причине сильнейший гром от молнии никто не назовет энгармоничным: ведь то, что гибельно для многих, не называется так, многие же получили увечья от грома. И если голос низок настолько, что уже не может сделаться ниже, он тоже не будет энгармоничным. Поэтому голосом может быть назван не всякий звук и не всякое его напряжение, но лишь энгармоничный, каковы меса, нета, гипата.

Интервалы

Интервалом называется промежуток, который голоса образуют между собой, каковы кварта, квинта, октава. Совокупность интервалов производит систему, каковы тетрахорд, пентахорд, октахорд. Гармония есть сочетание систем, каковы лидийская, фригийская, дорийская гармонии. Из голосов одни высокие, другие — низкие, третьи — средние: высокой будет нета, низкой — гипата, средними — промежуточные. Из интервалов одни созвучные, другие — разнозвучные. Созвучные интервалы могут быть антифонными, каковы октава и двойная октава, и парафонными, каковы квинта и кварта. Связи созвучий — это тон и диез. Антифоны — это созвучия, поскольку противолежащие высокий и низкий голоса созвучны; а парафоны — это созвучия, поскольку голоса в этом случае не однотонны и не разнозвучны, но образуют подобный интервал. Разнозвучны голоса, которые не являются созвучными, каковы интервалы тона и диеза; ведь тон и диез — начала созвучий, но не созвучия.

Созвучия

Перипатетик Адраст в своих *Рассуждениях о гармонии и созвучии* говорит: «Подобно тому, как важнейшими частями записанной или произнесенной речи служат глаголы и существительные, которые состоят из слогов, а те, в свою очередь, из букв, каковые первичны, элементарны и неделимы, ведь речь первоначально составляется из букв и в конце разлагается на них, так же и для мелодичного и гармоничного звука и мелодии в целом частями служат так называемые системы — тетрахорды, пентахорды и октахорды, которые состоят из интервалов, а те, в свою очередь, из голосов, которые первичны, неделимы и элементарны, и мелодия первоначально составляется из голосов и в конце разлагается на них. Голоса отличаются друг от друга по напряжению, одни из них высокие, а другие — низкие; и эти натяжения определяются различным образом».

А вот что говорят об этой технической стороне дела пифагорейцы. Всякая мелодия и всякий голос суть звуки, и всякий звук является шумом, а всякий шум — рассекающими воздух ударами; ведь ясно, что в неподвижном воздухе не возникнут ни шум, ни звук, ни голос. Они возникают в воздухе из-за ударов и движений, и быстрые служат причиной высокого голоса, а медленные — низкого, и сильные вызывают большой отклик, а слабые — малый. Частота и сила движений является причиной рациональности и иррациональности голосов между собой. Иррациональность порождает иррациональный и неблагозвучный шум, который не сто́ит называть голосом, но разве что отзвуком. А когда звуки находятся друг с другом в некотором отношении, кратном или сверхчастном, или в отношении числа к числу, они становятся благозвучными, преобладающими и особенными голосами. Из них одни всего лишь гармоничны, а другие — созвучны благодаря первым, познаваемым и преобладающим отношениям, кратным и сверхчастным.

Голоса созвучны друг с другом, когда голос, извлеченный из инструмента, вызывает звучание остальных благодаря некоему родству и симпатии, и далее, когда два голоса, извлеченные вместе, производят в своем слиянии сладостный и приятный звук. И в последовательно настроенных голосах первыми будут те, что созвучны друг с другом через четыре, поэтому данное созвучие и называется квартой; затем идут те, что созвучны через пять, и данное созвучие называется квинтой, следующие же согласуются через восемь, т. е. через все, и они охватывают два предыдущих созвучия и дают октахорд лиры, где первый и самый низкий голос называется гипатой, а последний и самый высокий — нетой, и в них обнаруживается связное антифонное созвучие. И хотя музыка впоследствии развивалась и инструменты приобретали больше струн и голосов, которые добавлялись сверху и снизу к имеющимся восьми, первые созвучия сохранили названия кварты, квинты и октавы. Затем к ним добавились и некоторые другие. К октаве приставлялись другие интервалы, меньшие, большие и равные, и оба интервала вместе производили новое созвучие, октаву и кварту, или октаву и квинту, или двойную октаву. И снова, когда уже полученные приставляются к октаве, и получается, к примеру, двойная октава и кварта, и в таком же духе до тех пор, пока слух способен их воспринимать. Ведь имеется место для звуков, от начального и самого нижнего голоса по порядку вплоть до самого высокого, и обратно; и иногда это расстояние больше, иногда меньше. При этом порядок и мелодичность возникают не случайно, не просто так и не изолированно, но определенным образом, который теоретически различается в вышеназванных родах мелодий. Ведь как в письменной или устной речи не всякая буква сочетается со всякой в слог или слово, так и в гармонично звучащей мелодии голоса следуют друг за другом не в произвольном порядке, лишь бы интервалы были мелодичными, но во вполне определенном порядке.

Тон и полутон

Как о месте звука, а также о части и мере всех известных интервалов говорится о так называемом тоновом интервале, точно так же как локоть господствует над расстояниями и перемещениями тел. Тоновый интервал легко узнаваем, поскольку он является разностью первых и известных созвучий: ведь квинта превышает кварту на тон.

При этом полутон называется так не потому, что он — половина тона, как считал Аристоксен, как полулокоть — это половина локтя, но потому, что он является мелодическим интервалом, меньшим тона; вот и полугласная буква называется так не потому, что она является половиной звука, но потому что она не до конца воплощает свой звук. Ведь можно показать, что целый тон не может делиться на две равных половины, ибо теория приписывает ему сверхвосьмерное отношение[3], которое не делится пополам на сверхчастные интервалы. Ведь 9 не делится на равные половины.

Три рода мелоса

Когда звук в так называемом месте интонируется вверх от низкого голоса к высокому и сначала проходит полутоновый интервал, а затем переходит к следующему голосу через тоновый интервал, далее для непрерывного слаженного продвижения ему надо подняться не на любой интервал и продвинуться не к любому благозвучному и гармоничному голосу, но обязательно на тоновый интервал, ибо голос такого повышения ограниченный, образуя с начальным голосом созвучие кварты. Такая мелодическая система называется тетрахордом, и она состоит из трех интервалов — полутона, тона и тона, и из чётырех голосов, из которых крайние, самый низкий и самый высокий, образуют созвучие кварты, которое, как уже было сказано, состоит из двух тонов и полутона. Этот род мелоса называется диатоническим — или просто потому, что он проходит через два тона, или же потому, что он обнаруживает возвышенный, решительный и напряженный характер.

Когда же звук переходит от первого голоса, повышаясь на полутон, и от второго голоса — снова на полутоновый интервал к третьему голосу, далее он может благозвучно продвигаться не на любой интервал, но лишь на несоставной интервал из трех полутонов, который является оставшейся частью первого порождаемого тетрахорда, переходя не к любому голосу, но лишь к тому, который ограничивает сверху первый тетрахорд, образуя с начальным голосом созвучие кварты. Получившийся мелос составлен из полутона, полутона и несоставного интервала в три полутона. Такой род мелоса называется хроматическим, ибо он отклоняется и отличается от первого, приобретая печальный и патетический характер.

Третий род мелоса называется энгармоническим. В нем тетрахорд интонируется продвижением звука от нижнего голоса на диез, диез и дитон. Последователи Аристоксена называют наи-

[3] Сверхвосьмерное, т. е. превышающее на восьмую часть.

меньшим диезом четверть тона, т. е. половину полутона, и считают его наименьшим интонируемым интервалом; пифагорейцы же называли диезом то, что сейчас называется полутоном. Аристоксен говорит, что этот род называется энгармоническим, потому что он лучший, ибо так именуется все, что хорошо слаженно. Этот род труден для интонирования, и, как говорит сам Аристоксен, он требует особой техники и многих упражнений. А диатонический род прост в исполнении, ведь он благороден, предпочтителен и естествен, как это воспринято от Платона.

<table>
<tr><td colspan="2">Полутон</td><td colspan="2">Тон</td><td>Тон</td><td>Диатоника</td></tr>
<tr><td colspan="2">Полутон</td><td>Полутон</td><td colspan="2">Тройной полутон</td><td>Хроматика</td></tr>
<tr><td>Диез</td><td>Диез</td><td colspan="3">Дитон</td><td>Энгармоника</td></tr>
</table>

Обнаружение числовой природы созвучий

То, что созвучие голосов заключается в их отношении между собой, первым обнаружил Пифагор. А именно, кварта имеет сверхтретье отношение, квинта — полуторное, октава — двукратное, октава с квартой — отношение 8 : 3, которое является многократным-и-сверхмногочастным, превышающим двойное на две трети; октава с квинтой — трехкратное, двойная октава — четырехкратное, а из прочих гармонических интервалов тон охватывается сверхвосьмерным отношением, а тот, что сейчас называется полутоном, а прежде диезом — отношением чисел 256 : 243. Он исследовал эти отношения, рассматривая длины и толщины струн, изменяя их натяжение вращением колков или подвешивая к ним разные грузы, а для духовых инструментов — по размеру отверстий или по усилению и ослаблению дыхания; а еще по размерам и весу дисков или сосудов. И какой бы метод не выбирался, выясняется, что созвучиям соответствуют одни и те же отношения.

Теперь мы покажем это на длинах струн так называемого канона. Если разделить струну на четыре равных части, голоса целого и трех частей будут порождать сверхтретье отношение и давать созвучие кварты. Две части, т. е. половина [целого], порождают двукратное отношение и дают созвучие октавы. Одна четверть порождает четырехкратное отношение и дает созвучие двойной октавы. Голоса трех и двух частей порождают полуторное отношение и дают созвучие квинты. Три четверти к одной порождают трехкратное отношение и дают созвучие октавы и квинты. Если разделить струну на девять частей, голоса целого и восьми частей в сверхвосьмом отношении будут охватывать тоновый интервал.

Все эти созвучия содержатся в тетрактиде. Ведь она состоит из чисел 1 2 3 4, в которых содержатся созвучия кварты, квинты и октавы, и сверхтретьи, полуторное, двукратное, трехкратное и четырехкратное отношения. Одни полагали, что эти созвучия следует получать из весов, другие — из величин, третьи — из числа движений, четвертые — из сосудов и объемов. Лас Гермионский, с которым согласны последователи пифагорейца Гиппаса из Метапонта, полагая, что частота движений в созвучиях соответствует числам, получал эти отношения на сосудах. Взяв равные и одинаковые сосуды и один из них оставив пустым, а другой наполовину наполнив водой, он извлекал звук из обоих, и у него выходило созвучие октавы. Затем он оставлял один сосуд пустым, а второй наполнял на четверть, и при извлечении звука у него получалось созвучие кварты. Квинта получалась, когда он заполнял сосуд на треть. Таким образом, отношение пустот составляло для октавы 2 : 1, для квинты 3 : 2, для кварты 4 : 3.

Как мы уже видели, эти же отношения наблюдаются и в длинах струн. Можно взять не одну струну, как на каноне, а две, звучащие при равном натяжении в унисон. И половина к целому дает созвучие октавы; а если струну разделить на три части и укоротить на одну, то с целым она даст созвучие квинты; а кварта получается, если струну разделить на четыре части и укоротить на одну часть в сравнении с целым.

И на сиринге производятся такие же отношения. Те, кто измерял созвучия грузами, подвешивали к двум струнам грузы в указанных отношениях. И в длинах струн также обнаруживаются созвучия. Голос есть выпадение звука на одном натяжении. Ведь сказано, что голос должен быть подобен самому себе и не допускать ни малейшего отклонения, не отклоняясь по натяжению ни вниз и ни вверх. Одни звуки бывают высокими, другие — низкими, и быстрые голоса будут высокими, а медленные — низкими. И если взять две трубки сиринги одинаковой толщины и диаметра, чтобы одна была вдвое длиннее другой, и подуть в них, то дыхание распространится по трубке половинной длины с удвоенной быстротой во времени, и произведет созвучие октавы, причем нижний голос извлечется из длинной трубки, а верхний — из короткой. Причина этого заключается в быстроте и медленности перемещения. И она же производит созвучия в одной трубке авлоса благодаря различным расстояниям до отверстий. Ведь когда авлос разделен пополам, то если сначала подуть в целый авлос, а затем открыть отверстие на половине длины, получится созвучие октавы. И если разделить авлос натрое, две части от язычка и одна внизу, то при переходе от целого к двум возникнет созвучие квинты. И если разделить его начетверо, три части наверху и одна внизу, то при переходе от целого к трем возникнет созвучие кварты.

Последователи Евдокса и Архита говорят, что отношение созвучий заключено в числах. И они считают, что это отношение содержится также в движениях, и быстрые движения высокие, потому что они гуще наносят удары и скорее рассекают воздух, а медленные — низкие, ибо они более вялые.

Вот что относится к обнаружению созвучий. Вернемся теперь к сказанному Адрастом. А он утверждал, что обнаружение созвучий в инструментах, которые приготовлены в соответствии с данными отношениями, предполагает чувственное восприятие, так что отношение присоединяется к чувствам.

Теперь мы разъясним, каким образом голоса, охватывающие полутоновой интервал, состоят между собой в отношении 256 : 243, и это вскоре станет ясным.

Сложение и вычитание созвучий

Очевидно, что составление и разделение созвучий теоретически согласуется с составлением и выделением вышеназванных отношений. Пусть октава составляется из квинты и кварты и разделяется на них же. И октаве соответствует двукратное отношение, кварте — сверхтретье, квинте — полуторное. Очевидно, что двукратное отношение, составляется из сверхтретьего и полуторного и разделяется на них же. Ведь для 6 сверхтретьим будет 8, и для 8 полуторным будет 12, что дает 12 : 6 в двукратном отношении: 6, 9, 12. И обратно, двукратное отношение 12 : 6 разделяется на сверхтретье отношение 12 : 9 и полуторное 9 : 6.

И поскольку квинта превосходит кварту на тон, ибо кварта равна трем тонам и полутону, тем самым тон имеет сверхвосьмерное отношение; ведь видно, что полуторное отношение превосходит сверхтретье на сверхвосьмерное. Действительно, если из полуторного отношение 9 : 6 вычесть сверхтретье отношение 8 : 6, останется сверхвосьмерное отношение 9 : 8. И обратно, если к этому отношению приставить сверхтретье отношение 12 : 9, получится составное полуторное отношение 12 : 8.

И поскольку октава имеет двукратное отношение, а кварта сверхтретье, вместе они дают отношение 8 : 3, ведь для 3 сверхтретьим будет 4, и для 4 двукратным будет 8. А интервал октавы и квинты имеет трехкратное отношение, поскольку полуторное и двукратное производят его при составлении. Ведь полуторное есть 9 : 6, и двукратное есть 18 : 9; и они порождают трехкратное отношение 18 : 6. Подобным образом двойная октава имеет четырехкратное отношение, поскольку оно составляется из двух двукратных. Ведь для 6 двукратным будет 12, а для него 24, и оно четырехкратно к 6. И далее, составлением трехкратного и эпитритного получается четырехкратное, ведь октава и квинта имеют трехкратное отношение, а кварта — сверхтретье, и если их составить вместе, получается двойная октава. Здесь действительно наблюдается четырехкратное отношение, ведь для 6 трехкратным будет 18, а сверхтретьим для последнего будет 24, и оно четырехкратно для 6. И иначе, для 6 сверхтретьим будет 8, а тройным для последнего будет 24, и оно четырехкратно для 6. Таким составлением можно открывать разные отношения, описывающие различные системы.

Космическая диатоника Платона

Платон распространил диатонический род и величину системы до четырех октав, квинты и тона. Адраст говорит, что его не надо было уводить столь далеко, ведь Аристоксен определил величину многоладовой диаграммы как двойную октаву и кварту, а нынешние ограничиваются пятнадцатиструнным ладом, величиной в три октавы и тон. Я утверждаю, что они ограничились этим и не пошли дальше ради нашей пользы, ибо нельзя выйти за эти границы ни в исполнении, ни в слушании. Платон же рассматривал природу и душу и необходимо составлял гармонию вплоть до телесных чисел, сопряженных двумя средними, дабы все порожденное достигло совершенства в твердом космическом теле; и этот лад по своей природе уходит в бесконечность.

Соответствие низких голосов и больших чисел

И он сказал, что низким голосам следует присваивать большие числа, хотя это и не отвечает натяжениям, создаваемым подвешенными грузами. Ведь та из двух равных по длине и толщине струн, к которой прикреплен больший груз, дает более высокий голос. Больший груз вызывает большее натяжение, так что увеличение дополнительной нагрузки дает более высокий голос по сравнению с тем, который получается при исходной силе натяжения. И обратно, очевидно, что у более низкого голоса его собственная способность больше приобретенной и присоединенной, что позволяет ему сохранять собственную гармонию и созвучность. Поэтому большему числу присуща большая способность. С этим согласуется и иное. Ведь длины и толщины медленных струн служат причиной бессилия, малоподвижности и невозможности быстро рассекать воздух. Отсюда очевидно, что низкие голоса обладают большей собственной способностью в соответствии с большими числами[4].

Это же открывается и в духовых инструментах. Ведь низкие голоса извлекаются здесь при большей длине и больших размерах отверстий, пропускающих воздух. И конечно, при ослаблении дыхания в трубах и трахеях производятся звуки более слабые и бессильные, нежели при естественной присущей им способности.

Устройство кварты

Платон говорит, что первым созвучием является кварта: ведь через нее отыскиваются и остальные. А квинта отделена от кварты на тон. Тон и определяется как интервал между квинтой и квартой. И октава отыскивается в кварте и квинте: ведь они составлены из кварты и квинты.

[4] Весьма темное место; но оно и не может быть иным, так как доводы здесь спекулятивны и совершенно бездоказательны.

Древние называли тон первым звуковым интервалом, а полутон и диез не рассматривали. Тон обнаруживается в сверхвосьмерном отношении, что показывается посредством дисков, сосудов, авлосов, подвешиваний и разными другими способами. Ведь 9 : 8 на слух воспринимается как тоновый интервал. Поэтому первым интервалом служит тон, ибо ум и звук, спускаясь к нему, обретают устойчивость слуха. По этой причине данный интервал точно воспринимается на слух. Что касается следующего интервала, так называемого полутона, то одни говорят о нем как о совершенном полутоне, а другие — как о лейммe[5].

Сверхтретий интервал кварты не заполняется сверхвосьмерными тоновыми интервалами. Ведь все согласны, что кварта больше двух тонов, но меньше трех. Аристоксен сказал, что она состоит из двух тонов и совершенного полутона, а Платон — что она состоит из их двух тонов и так называемой леймы. О леймме он сказал, что этот безымянный интервал характеризуется отношением 256 : 243 и разностью 13.

Найдем это. Первый член не может быть равен 6, поскольку 6 не имеет сверхвосьмерного числа, а от него надо произвести сверхвосьмерное. И он не равен 8, ведь хотя 8 и имеет сверхвосьмерное 9, само 9 сверхвосьмерного уже не имеет. Нужно же взять сверхвосьмерное от сверхвосьмерного, поскольку сверхтретья кварта больше дитона. Возьмем за основу сверхвосьмерные 8 и 9, и умножив 8 на себя, получим 64, умножив его на 9, получим 72, умножив 9 на себя, получим 81. Взяв каждое трижды, получим $64 \times 3 = 192$, $72 \times 3 = 216$, $81 \times 3 = 243$. Мы имеем 8 9 64 72 81 192 216 243. Вслед за 243 возьмем сверхтретье от 192, равное 256. Мы последовательно получили: сверхвосьмерное основание 8 9; второе сверхвосьмерное 64 72 81; третье сверхвосьмерное 192 216 243. Добавим сверхтретье от 192, т. е. 256, и теперь сверхтретье [отношение кварты] составлено из двух тонов и вышеназванной леймы.

$$\underbrace{192 \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{тон } (^9/_8)} 216 \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{тон } (^9/_8)} 243 \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{лейма } (^{256}/_{243})} 256}_{\text{квинта } (^4/_3)}$$

[5] То есть остатка.

Некоторые за первый член берут 384, чтобы можно было взять два сверхвосьмерных. Первый член 6, взятый восьмикратно, дает 48, еще одно умножение на восемь дает 384, сверхтретье от него равно 512. Между ними находятся два сверхвосьмерных, 432 и 486, и последнее с 512 производит отношение лейммы.

$$\underbrace{384 \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{тон }(^9/_8)} 432 \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{тон }(^9/_8)} 486 \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{леймма }(^{256}/_{243})} 512}_{\text{квинта }(^4/_3)}$$

Некоторые говорят, что эти числа взяты неправильно: ведь превышение четвертого члена над третьим не равно 13, а Платон сказал, что лейма должна быть такой. Но ничто не мешает отыскать в других числах такое же отношение, какое имеется между 256 и 243. Ведь Платон брал не числа, но отношения чисел. И как 256 : 243, так и 512 : 384. Ведь 512 является двукратным к 256, и 384 к 243 тоже.

И очевидно, что разность между 256 и 243, равная 13, меньше полутона. Ведь тон является сверхвосьмерным, а полутон — половиной сверхвосьмерного, т. е. превышающим на шестнадцатую долю. Но 13 находится к 243 в отношении, меньшем одной восемнадцатой (243 = 18 × 13 + 9), так что эта часть меньше одной шестнадцатой[6].

Однако разделить сверхвосьмерное отношение пополам невозможно, и нужного отношения не существует, хотя некоторые и считают, что это осуществимо на слух. Основой сверхвосьмерного интервала является 9 : 8, а единица неделима.

Когда спрашивают о так называемой лейме, к чему эта лейма относится, можно увидеть, что она относится к кварте: ведь одна делает кварту меньшей, чем два с половиной тона.

Теперь поговорим о том, как находится тон. Поскольку кварта обнаруживается в сверхтретьем отношении, а квинта в полуторном, берется первое число, имеющее половину и треть, и это чис-

[6] Ошибка в рассуждениях (не влияющая на правильность выводов), восходящая к Филолаю: отношение $^{17}/_{16} = 1^{1}/_{16}$ не является половиной от $^{9}/_{8} = 1^{1}/_{8}$. Впрочем, неделимость тона пополам указана в следующем предложении.

ло 6. Сверхтретье от него 8, полуторное 9: вот 6 8 9. И интервал между полуторным и сверхтретьим отыскивается в сверхвосьмерном отношении: ведь 9 будет сверхвосьмерным от 8. Это протяжение называется тоном.

Очевидно, что тон не делится пополам. Ведь разница в основе сверхвосьмерного интервала составляет единицу, а она неделима. И какими бы числами не выражался сверхвосьмерный интервал, разница никогда не делится пополам. Так, в отношении 216 : 243 разность равна 27, и она не делится пополам, но на 13 и 14: ведь единица неделима[7]. Поэтому тон постигается умом в числах и в интервалах, а слухом в звуках, и мы знаем, что он не делится на равные половины ни в числах, ни в чувственных и наблюдаемых интервалах.

Ведь взятое на чувственно воспринимаемом каноне имеет некоторую ширину и не является совсем бесширинным; а потому при делении тона не вполне ухватывается, где кончается первая часть и начинается вторая, и что-то от тона утрачивается. При делении имеются три части: две разделенные, а третья лежит на порожке. И когда разделенные части находятся по разные стороны выступа, теряется то, что лежит на самом порожке. И как в некоторых чувственных вещах нечто теряется, так же и во всех прочих, и даже если это не воспринято чувствами, в них все равно что-то утрачивается при делении. Если разделить на части тростинку или другую чувственную длину, предварительно ее измерив, а потом найти полную длину всех получившихся частей, то обнаружится, что полная длина всех кусков меньше длины целого до разрезания. И если разрезать струну, а потом связать отдельные куски и снова натянуть их, первоначальной величины уже не получится. Поэтому два полутона не являются полными.

И в звуках деления тона на равные части тоже не обнаружить. Пусть тон интонируется два раза, причем во второй раз вместо одного тона подъем происходит по трем голосам двумя полутоновыми интервалами. И третий голос, который выше второго, будет

[7] Снова повторяется ошибочный довод, восходящий к Филолаю. Можно увеличить все числа вдвое, и тогда разность между краями разделится пополам; но для деления тона пополам надо вставить между крайними членами не среднее арифметическое, а среднее геометрическое.

отличаться от первого тона, так что будет казаться, что он поднялся над вторым на полутон, но не на такой полутон, на который второй голос поднялся над первым, и нижний и верхний полутона не будут подобными. И мы не сможем получить один голос дважды при разделении звука. Резонанс мы услышим, но он обязательно будет с некоторой разницей, хотя и скрытой для слуха.

И невозможно ни дважды нанести одинаковый укол, ни дважды с одинаковой силой ударить одну струну, ибо удар будет то сильнее, то слабее, ни дважды войти в одну и ту же воду, ни поднять такую же каплю, окунув палец в чернила, мед или смолу. Что касается умозрительного тона, то его мысленно можно разделить на равные части.

Логос как отношение

Теперь мы поговорим о гармонии чисел, обсудив члены, обнаруживаемые в нашей речи, каковые суть число, величина, способность, масса, вес.

Перепатетики говорят о логосе во многих значениях: это и устная речь, как говорят новые писатели, и внутренняя речь без звука и голоса; и пропорция (ἀναλογία), когда говорится, что имеется отношение (λόγος) одного к другому; и объяснение элементов; и прославление достойных, когда мы называем кого-то прославленным или бесславным; и «меняльная речь», как в книгах Демосфена и Лисия;[8] и определение и обозначение вещей; и силлогизм и наведение; и «Ливийские басни» (сборник басен. — *А. Щ.*) и мифы; и пословицы и поговорки; и видовой логос, и семенной, и многие другие.

Платон же говорит о логосе в четырех смыслах: это размышление без голоса; это мысль, изреченная в звуке; это объяснение элементов Вселенной; и это пропорция. Это отношение в пропорции мы теперь и рассмотрим.

Отношение возникает, когда два однородных члена пропорции образуют некоторую связь друг с другом: к примеру, двукратное или трехкратное. Адраст говорит, что неоднородные вещи не могут иметь отношения друг к другу. Локоть и мина, хойникс и

[8] 17-я «меняльная речь» Лисия против менялы Пасиона.

котюла[9], белое и сладкое или горячее несравнимые и несопоставимые. А однородные могут: длина к длине, поверхность к поверхности, тело к телу, тяжесть к тяжести, жидкость к жидкости, сыпучее к сыпучему, твердое к твердому, число к числу, время ко времени, движение к движению, звук к звуку, вкус ко вкусу, цвет к цвету, и во всяком роде и виде вещи имеют отношение между собой. Членами отношения мы называем однородные предметы, сравниваемые друг с другом. Когда мы спрашиваем, какое отношение имеет талант к мине, мы говорим, что талант и мина — однородные члены, ибо оба они относятся к роду тяжестей. И так для всякого отношения. Пропорция — это связь отношений; к примеру, как 2 к 1, так и 8 к 4.

Отношения могут быть большими, меньшими или равными. Равное отношение является одним и тем же, и оно идет впереди других отношений и является элементарным. Равные отношения суть такие, в которых одинаковые количества относятся друг к другу, каковы 1 : 1, 2 : 2, 10 : 10, 100 : 100. Среди больших отношений одни многократные, другие — сверхчастные, третьи — ни те, ни другие. Среди меньших отношений одни обратные многократным, другие — обратные сверхчастным, третьи — ни те, ни другие. И одни отношения созвучны, а другие нет.

Созвучными являются из многократных двукратное, трехкратное и четырехкратное отношения, их сверхчастных — полуторное и сверхтретье, среди прочих имеются сверхвосьмерное отношение и отношение 256 : 243. И среди обратных — обратное двукратному, обратное трехкратному, обратное четырехкратному, обратное полуторному, обратное сверхтретьему, обратное сверхвосьмерному, и 243 : 256. И двукратное отношение, как было показано выше, обнаруживается в созвучии октавы, трехкратное — в октаве и квинте, четырехкратное — в двойной октаве, полуторное — в квинте, сверхтретье — в кварте, сверхвосьмерное — в тоне, и 256 : 243 — в леймме. И подобным образом — обратные им. К прочим же относятся сверхвосьмерное отношение и 256 : 243, так как они находятся и не в созвучиях, и не вне созвучий: тон и леймма — начала созвучий и заполняют созвучия, но сами созвучиями не являются.

---

[9] Хойникс — мера для сыпучих тел, а котюла — для жидких.

Среди числовых отношений имеются не только многократные и сверхчастные, но также сверхмногочастные, многократные-и-сверхмногочастные и другие, о которых мы поговорим ниже.

Кварта составлена из двух тонов и лейммы, квинта — из трех тонов и лейммы, октава — из квинты и кварты. И всем им предшествуют пропорции.

Следуя арифметическому учению, изложенному Адрастом, о числах говорят, что они бывают многократными, сверхчастными, сверхмногочастными, многократными-и-сверхчастными, многократными-и-сверхмногочастными, а также обратными многократным и прочими обратными большим.

Классификация отношений

Многократно то отношение, в котором больший член несколько раз содержит меньший, и в точности и без остатка измеряется меньшим членом. По виду это — «столькождыкратное», и о большем члене говорят по меньшему, сколько раз он его измерил. Если измерил дважды, отношение будет двукратным, трижды — трехкратным, четырежды — четырехкратным, и так далее. И обратно, меньшая часть по отношению к большей называется омонимично: для двукратного это половина, для трехкратного — треть, и отношение здесь половинное, а здесь — трехчастное; и тому подобное.

Сверхчастно то отношение, в котором больший член содержит один раз меньший и еще одну долю меньшего, т. е. когда больший член превосходит меньший на число, которое является долей меньшего. Таково отношение четырех к трем: здесь разность составляет единицу, т. е. третью часть от трех; и шесть превосходит четыре на два, т. е. на половину от четырех. Каждое сверхчастное отношение называется по имени этой превосходящей части. Когда эта часть является половиной меньшего члена, отношение называется полуторным, каковы три к двум и шесть к чётырем. Большее содержит здесь меньшее и его половину: три — два и его половину, единицу; шесть — четыре и его половину, два. Далее, когда меньшее превосходится на третью часть, отношение называется сверхтретьим, и таковы четыре к трем, а когда превосходится на четверть — сверхчетвертным, и таковы 5 : 4 и 10 : 8, и подобным образом получаются сверхпятерное, шестерное, семерное, и все прочие сверхчастные отношения. Так же образуются обратные сверхчастным отношения, когда меньшее отнесено к большему: ведь отношение трех к двум называется полуторным, а отношение двух к трем — обратным полуторному; и подобно этому, отношение трех к четырем обратно сверхтретьему.

Среди многократных отношений первым и наименьшим является двукратное, за ним идет трехкратное, затем четырехкратное, и так до бесконечности, всегда увеличиваясь. Среди сверхчастных отношений первым и наибольшим будет полуторное, ведь половинная доля является первой, наибольшей и ближайшей к целому, за ним идут сверхтретье и сверхчетвертное, и так до бесконечности, всегда на понижение.

Сверхмногочастное то отношение, в котором больший член содержит один раз меньший и еще несколько долей меньшего, каковые могут быть одинаковыми или же разными и различными. Одинаковыми могут быть две трети, две пятых, и тому подобные. Так, число 5 превышает 3 на его две трети, 7 : 5 — на две пятых, 8 : 5 — на три пятых, и так далее. Разными и различными долями — когда большее содержит меньшее, его половину и треть, и таково отношение 11 : 6; или превышая его на половину и чётверть, каково отношение 7 : 4, или, клянусь Зевсом, на треть и четверть, и таково отношение 19 : 12. И в других подобных сверхмногочастных наблюдается превышение на две части, три или большее число, и эти части могут быть подобными и неподобными. А обратные к ним получаются переворачиванием, когда меньший член берется в отношении к большему.

Многократное-и-сверхчастное то отношение, в котором больший член несколько раз содержит меньший и еще одну его долю. Так, 7 дважды содержит 3 и еще его треть, и называется по отношению к нему двукратносверхтретьим; и 9 дважды содержит 4 и еще его четверть, и называется двукратным-и-сверхчетвертным; и 10 трижды содержит 3 и еще его треть, и называется трехкратносверхтретьим. Прочие многократные-и-сверхчастные теоретически рассматриваются таким же образом. Они получаются, когда меньшее из двух предложенных чисел измеряет большее не целиком, но остается такая часть, которая является частью меньшего числа тоже. Так отношение 26 : 8 называется многократным-и-сверхчастным, потому что 8 трижды измеряет 26, причем не нацело, но так, что 24 недостает двух до 26, и они являются четвертью 8.

Многократное-и-сверхмногочастное то отношение, в котором больший член несколько раз содержит меньший и еще две или больше его долей, подобных или различных. Так, 8 дважды содержит 3 и две его трети, и о нем говорят, как о двукратном и дважды сверхтретьим; и 11 : 3 является трехкратным и дважды сверхтретьим; а 11 : 4 — двукратным, половинным и сверхчетвертным или же двукратным и трижды сверхчетвертным. Легко найти много других многократных-и-сверхмногочастных. Они возникают, когда меньшее число измеряет большее не нацело, но так, что остается число, которое является несколькими частями меньшего, каково отношение 14 : 3: ведь три измеряет 14 не нацело, но взятое четырежды, оно дает 12, которое меньше 14 на двойку, которая является двумя частями от 3, и ее называют двумя третями. И многократным-и-сверхмногочастным противоположны обратные им.

Отношение числа к числу имеет место, когда большее число не состоит к меньшему в названных выше отношениях[10]. Как будет показано, леймма охватывается отношением числа к числу, которое в наименьших членах выражается как 256 : 243. Очевидно, что отношение меньших чисел к большим — обратное и называется по исходному отношению.

Все виды названных отношений выражаются наименьшими и первыми между собой числами, которые называются первыми для прочих, имеющих то же самое отношение, и служат основой для каждого вида. Так, для двукратного первым и основным будет отношение 2 : 1, а за ним идут двукратные отношения больших и составных чисел, 4 : 2, 6 : 3 и тому подобные до бесконечности. Для трехкратного первым и основным будет отношение 3 : 1, а за ним всегда идут до бесконечности большие и составные числа. И так для всех остальных многократных. И подобным образом для сверхчастных. Для полуторного первым и основным будет отношение 3 : 2, для сверхтретьего — 4 : 3, для сверхчетвертного —

[10] Такого, конечно, быть не может, так как всякое отношение большего к меньшему относится к одному из пяти названных родов. В частности, отношение 256 : 243 сверхмногочастное, «превышающее на тринадцать двести сорок третьих».

5 : 4. А больших и составных имеется неограниченно много. И это же можно наблюдать для всех прочих.

Различие между интервалом и отношением

Интервал и отношение разнятся в следующем: интервал — это то, что находится между однородными и неравными членами, а отношение — это связь однородных членов друг с другом. По этой причине равные члены не заключают между собой интервала, но они состоят друг к другу в отношении равенства. И неравные члены заключают между собой один интервал, а отношение может обращаться от одного члена к другому. Так, в отношениях 2 : 1 и 1 : 2 интервал один и тот же, а сами отношения разные: два к одному — двукратное, а один к двум — половинное.

И Эратосфен в *Платонике* говорит, что интервал и отношение — не одно и то же, поскольку отношение задается двумя величинами, образующими связь между собой, и оно возникает как между различными, так и между неразличимыми вещами. К примеру, как относятся чувственно воспринимаемое к умопостигаемому, так и мнение к знанию, и здесь различны умопостигаемое и знание, с одной стороны, и мнение и чувственно воспринимаемое, с другой. Интервал же — только между различными, будь то по величине, по качеству, по положению или как-нибудь еще. И потому очевидно, что отношение отличается от интервала: ведь отношение половины к двукратному и двукратного к половине не одно и то же, а интервал здесь один.

Пропорция

Пропорция есть подобие или тождество нескольких отношений, или же подобие отношений в нескольких членах, когда первый член ко второму имеет то же отношение, что и второй к третьему, или другой к другому. Говорят о непрерывной пропорции и о раздельной, и наименьшая непрерывная заключается в трех членах, а наименьшая раздельная — в четырех. К примеру, вслед за пропорцией из равных членов идет непрерывная пропорция в наименьших членах по двукратному отношению 4 2 1: ведь как 4 к 2, так и 2 к 1. Раздельная же пропорция — 6 3 4 2:

ведь как 6 к 3, так и 4 к 2. И такой же принцип для других многократных. Непрерывная пропорция также может рассматриваться как состоящая из четырех членов, где средний член повторен дважды. И то же самое для сверхчастных отношений; непрерывная пропорция в полуторном отношении 9 6 4, раздельная 9 6 15 10. И тот же принцип для других отношений.

Эратосфен говорит, что природное начало пропорции — отношение, и оно служит первопричиной упорядоченного рождения. Пропорция исходит из отношения, а началом отношения является равенство. И это очевидно. Во всяком обособленном роде имеется свой элемент (στοιχεῖον) и начало, в который все прочее разрешается, он же неразложим. И необходимо, чтобы он был нераздельным и неделимым: ведь рассечение и деление допускает произносимый слог, но не звук речи (στοιχεῖον). И элементы сущности неделимы по своей сути: элементы качества — по качеству, элементы количества — по количеству. Всякая сущность неделимая и единая, когда она служит элементом составной и смешанной сущности.

Для количества элементом служит единица, для размеров — точка, для отношения и пропорции — равенство. Ведь единица неделима по количеству, точка — по размерам, равенство — по множеству отношений. И число возникает из единицы, линия — из точки, отношение и пропорция — из равенства, но это происходит неодинаковым образом. Ведь единица, умноженная на саму себя, не производит других чисел, поскольку единожды один — это один. А сложением она возрастает до бесконечности. Точки же не перемножаются и не складываются, но непрерывным течением и переносом [точки] создается линия, линии — поверхность, поверхности — тело. И отношение равенства не возрастает сложением: ведь если сложить несколько равных отношений подряд, охватывающее отношение останется в равенстве. И как точка не является частью линии, так и равенство — частью отношения; однако единица является частью числа. Ведь только число возрастает через сложение. Причина же этого в том, что равенство лишено интервала, так же как и точка лишена величины.

Похоже, что Платон единственной связью математических предметов считал пропорцию. Ведь в *Послезаконии* он говорит: «Всякая фигура, сочётание чисел и гармоническое единство по сути пропорциональны кругообращению звезд; и одно для того, кто надлежащим образом его усвоил, разъясняет и все остальное. Добавим, впрочем, что так будет, если он, наблюдая за одним, усваивает правильно» (Послезаконие, 991e)[11].

От пропорции отличается среднее; ведь пропорциональное обязательно среднее, но среднее не обязательно пропорциональное. Ведь среднее по порядку не обязательно образует пропорцию с крайними. Так, 2 является средним по порядку между 1 и 3, и 2 3 4 — промежуточные между 1 и 10. Ведь от 1 не дойти до 10, не пройдя прежде 2 3 4. Но они не образуют пропорцию с крайними. Ведь 1 не состоит к 2 в таком же отношении, что и 2 к 3. Подобно этому и 2 3 4. Нужно, чтобы среднее было в одном отношении [с крайними], как 1 2 4. Ведь здесь имеется пропорция двукратного, которую 2 образует с 1 и 4.

Фрасилл говорит, что имеется три первоначальных пропорции: арифметическая, геометрическая, гармоническая. Арифметическая — когда превосходит и превосходится на одно число; геометрическая — когда превосходит и превосходится в одном отношении, например двукратном или трехкратном, каковы 3 6 12; гармоническая — когда превосходит и превосходится одной частью крайних, например третью или четвертью, каковы 6 8 12.

Все это может быть рассмотрено в числах. Так, к 6 двукратным будет 12, трехкратным 18, четырехкратным 24, полуторным 9, сверхтретьим 8. И 12 будет к 9 сверхтретьим, к 8 полуторным, к 6 двукратным. И 18 будет к 9 двукратным, а к нему 27 будет полуторным. И 8 к 6 производит кварту, 9 — квинту, 12 — октаву, 18 — октаву и квинту. И двукратным к 6 будет 12 в октаве, и полуторным к 12 будет 18 в квинте: 6 12 18. А 24 будет к 6 в двойной октаве. И 9 : 8 — тон, 12 : 9 — кварта, 12 : 8 — квинта, 18 : 9 — октава, 27 : 18 — квинта. Октава 12 : 6 составляется из полуторного 9 : 6 и сверхтретьего 12 : 9, и в обратном порядке, из полуторного 12 : 8 и сверхтретьего 8 : 6. И 18 : 9 из полуторного 18 : 12 и сверхтретьего 12 : 9. И октава 24 : 12 составляется из сверхтретьего 24 : 18 и полуторного 18 : 12. И квинта 9 : 6 составляется из сверхвосьмерного 9 : 8 и сверхтретьего 8 : 6. И полуторное 12 : 8 из сверхтретьего 12 : 9 и сверхвосьмерного 9 : 8.

[11] Сам Платон говорит не о пропорции (ἀναλογία), а о сходстве (ὁμολογία).

Леймма зарождается в отношении 256 : 243. Находится это так: мы берем дважды сверхвосьмерное, утроив его члены, и к дважды сверхвосьмерному присоединяем сверхтретье. Пусть дано сверхвосьмерное отношение 9 : 8. Произведем из него дважды сверхвосьмерное: 9 на себя дает 81, 9 на 8 дает 72, 8 на себя дает 64; и 81 : 72 является сверхвосьмерным, и 72 : 64 тоже является сверхвосьмерным. Если взять их тройными, 81 дает 243, 72 дает 216, 64 дает 192. Сверхтретьим к нему будет 256, и оно с 243 имеет отношение лейммы, которое меньше превосходящего на восемнадцатую часть.

Деление канона

Деление канона производится в соответствии с тетрактидой декады, составленной из единицы, двойки, тройки и четверки: 1 2 3 4. Здесь содержатся сверхтретье, полуторное, двукратное, трехкратное и четырехкратное отношения.

Вот как Фрасилл производит это деление. Взяв половину величины, он получает посредине октаву в двойном отношении, ведь обратно пропорциональное в движении имеет двукратное повышение. А обратно пропорциональное — это вот что: когда длина струны уменьшается, напряжение возрастает, а когда длина струны увеличивается, напряжение уменьшается. Ведь половинная величина (от просламбаноменос к месе) имеет двукратное повышение; а двукратная величина имеет половинное понижение.

Разделение струны на три части создает *гипату средних* и *нету разделенных*. Ведь *нета разделенных* с *месой* составляют квинту, поскольку берутся два отрезка к трем. А с *гипатой* — октаву, поскольку берется один отрезок к двум. С *просламбаноменос* же — октаву и квинту, ведь *просламбаноменос* с *месой* составляет октаву, к которой присоединяется интервал от *месы* до *неты*, т. е. квинта. А от *месы* до *гипаты* — кварта, а до *просламбаноменос* — октава. И от *гипаты* до *просламбаноменос* — квинта. Разделение величины на равные части дает кварту от *гипаты* до *месы* и квинту от *месы* до *неты*. А числа движений обратно пропорциональны разделению величин.

Разделение струны на четыре части дает так называемые *гиперипату, диатонную гипату* и *нету высших*. И *нета высших* с *нетой разделенных* составляет кварту, с *месой* — октаву, с *гипатой* — октаву и кварту, с *гиперипатой* — октаву и квинту, с *просламбаноменос* — двойную октаву на понижение. А отношение *гиперипаты* к *просламбаноменос* — кварта на понижение, к *месе* — квинта на повышение, и *гипата* превышает *гиперипату* на тон. И отношение величины *гиперипаты* к *гипате* равно тону, а *неты разделенных* к *нете высших* — кварте. А числа движений обратно пропорциональны разделению величин.

Все сказанное проясняется в числах. Разделим величину канона на 12 частей. *Меса* делит струну пополам, т. е. на отметке 6. И от *гипаты средних* до начала — 4 части, от неты разделенных до конца — 4 части, и между ними — тоже 4. От *гиперипаты* до начала — три части, а до *гипаты* — одна. И от [*неты*] *высших* до конца — 3 части, а до [*неты*] *разделенных* — одна. А между ними — 6, и от каждой из них до *месы* — 3. И в разделении целого от начала до *гиперипаты* — 3 части, затем до *гипаты* — одна, затем до *месы* — две, от *месы* до [*неты*] *разделенных* — 2, затем до [*неты*] *высших* — одна, а от нее до конца — 3. А всего их 12.

С [*нетой*] *высших нета разделенных* дает сверхтретье отношение 4 : 3 или кварту, *меса* — двукратное 6 : 3 или октаву, *гипата* — двукратносверхтретье 8 : 3 или октаву и кварту, *гиперипата* — трехкратное 9 : 3 или октаву и квинту, вся *просламбаноменос* — четырехкратное 12 : 3 или двойную октаву. С *нетой разделенных меса* дает полуторное отношение 6 : 4 или квинту, *гипата* — двукратное 8 : 4 или октаву, *гиперипата* — двукратносверхчетвертное 9 : 4 или двойную кварту, вся *просламбаноменос* — трехкратное 12 : 4 или октаву и квинту. С *месой гипата* дает сверхтретье отношение 8 : 6 или кварту, *гиперипата* — полуторное 9 6 или квинту, вся *просламбаноменос* — двукратное 12 : 6 или октаву. С *гипатой гиперипата* дает сверхвосьмерное отношение 9 : 8 или тон, вся *просламбаноменос* — полуторное 12 : 9 или квинту. И с *гиперипатой* вся *просламбаноменос* дает сверхтретье отношение 12 : 9 или кварту.

Остальные движения обратно пропорциональны укорочениям канона: сверхвосьмерной тон, сверхтретья кварта и полуторная квинта. Полуторная квинта превосходит сверхтретью кварту на сверхвосьмерной тон. Возьмем число 6, имеющее половину и треть, его сверхтретье 8 и полуторное 9; и 9 будет сверхвосьмерным к 8. Числа 6 8 9 образуют полуторное и сверхтретье отношения, разнящиеся на сверхвосьмерное.

Сверхтретья кварта состоит из двух сверхвосьмерных тонов и диезной леймы; и [все тетрахорды] сплошь заполняются сверхвосьмерными тонами и диезными леймами. Сначала заполним [тетрахорд] высших, начиная от *неты*. Удлинив *нету* на ее восьмую часть, мы получим *диатон верхних*, тоном ниже. Удлинив *диатон* на его восьмую часть, мы получим *триту верхних*, тоном ниже *диатона*. Остаток до *неты разделенных* будет диезной леймой, восполняющей кварту до *неты высших*. Отняв от *неты разделенных* ее девятую часть, мы поднимемся до *хроматики высших*, тоном выше *неты разделенных*. А удлинив [*нету разделенных*] на ее восьмую часть, мы получим *паранету разделенных*, которая есть *диатон и нета соединенных*, тоном ниже *неты разделенных*. И если эту *нету* удлинить на ее восьмую часть, мы получим *триту разделенных* тоном ниже, и она же есть *диатон соединенных*. Подобным образом удлинив [*триту разделенных*] на ее восьмую часть, мы получим *триту соединенных*, тоном ниже. И остаток до *месы* будет диезной леймой, восполняющей октаву. Укоротив *месу* на ее восьмую часть, мы получим *парамесу* или *хроматику соединенных*, тоном выше *месы*. Проделав такое укорочение еще раз [с *парамесой*], мы получим *хроматику разделенных*. И остаток до *гипаты средних* будет диезной леймой, восполняющей кварту до *месы*. Удлинение *месы* на ее восьмую часть дает *диатон средних*, тоном ниже *месы*. Если [этот *диатон*] удлинить на его восьмую часть, получится *парипата средних*, тоном ниже. Если от *гипаты* отнять ее девятую часть, получится *хроматика средних*, тоном выше. Удлинением [*гипаты*] на ее восьмую часть получается *гиперипата*. А удлинением [*гиперипаты*] на ее восьмую часть получается *парипата нижних*. Обратно, разделив всю *просламбаноменос* на 9 частей и удалив одну из них, мы получим *гипату нижних*, тоном выше целого, восполняющую леймой нижний тетрахорд до *парипаты*. Так замыкается полная неизменная система диатонического и хроматического родов. А в энгармонической [системе] в каждом тетрахорде удаляется *диатон* и производится раздвоение [леймы].

Мы могли бы найти все это в числах, начиная с неты высших, положив [*просламбаноменос*] равной 10368. От него берутся сверхвосьмерные и прочие упомянутые отношения, но мы не станем их приводить: легко опустить сказанное. Таково деление канона, по

Фрасиллу. Что касается гармонии небесных сфер, мы поговорим о ней, когда речь пойдет об астрономии.

Четверица и декада

Теперь же мы перейдем к учению о пропорциях и средних, ведь сказано уже, что всякая пропорция есть среднее, но не всякое среднее — пропорция. И вот, чтобы уяснить, что представляет собой пропорция и среднее, перейдем к учению о пропорциях и средних.

Как мы уже показали, все отношения созвучий отыскиваются в декаде, декада же — в четверице, так что мы сначала поговорим о ней. Четверица составляет декаду. Ведь 1 + 2 + 3 + 4 = 10. В этих числах заключено созвучие кварты в сверхтретьем отношении, квинты — в полуторном, октавы — в двукратном, двойной октавы — в четырехкратном. Из них составляется неизменная диаграмма.

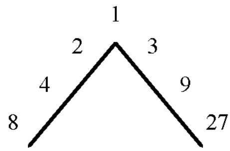
Четверица сложения существенна для музыки, ибо в ней обнаруживаются все созвучия. Но пифагорейцы почитали ее не только по этой причине, ибо они считали, что в ней заключена природа целого. Поэтому они приносили такую клятву:

> Нет, клянусь передавшим нашей душе четверицу,
> Вечной природы исток и корень в себе содержащу.

«Передавшим» здесь зовется Пифагор; считается, что это он ее открыл и изрек.

Первая четверица — та, о которой мы сейчас говорили, и она получается сложением первых четырех чисел.

Вторая четверица образуется умножением единицы на чётные и нечётные числа. Первой берется единица, ибо она является началом всех чётных, нечётных и чётно-нечётных чисел. Дальше идут три чётных или три нечётных числа в одном отношении. Они получаются такими, а произвольное число отнюдь не является только чётным или только нечётным. Получаются две четверицы умножения, чётная и нечётная, и чётная восходит в двукратном отношении, ведь первое чётное от единицы — это 2, а нечётная восходит в трехкратном отношении, ведь первое нечётное от единицы — это 3. А единица — общая для обеих, ведь она по своей сути и чётна, и нечётна. Второе число среди чётных — двукратное 2, среди нечётных — трехкратное 3; третье среди чётных — 4, среди нечётных — 9; четвертое среди чётных — 8, среди нечётных — 27.



В этих числах обнаруживаются отношения совершенных созвучий, включая тон. Единица есть потенциальное начало и точка[12] отношения. Вторые числа, 2 и 3, —потенциальные стороны; они несоставные, первые, измеряемые единицей и измеряющие прямую по своей природе. Третьи члены, 4 и 9, — потенциальные плоские квадраты, равно-равные. А четвертые члены, 8 и 27, — потенциальные равно-равно-равные кубы. В этих числах и в этой четверице происходит восхождение от точки к телу. За точкой идет сторона, за стороной — поверхность, за поверхностью — тело. С помощью этих чисел Платон в *Тимее* создает душу (Тимей, 36bc). Последнее из этих семи чисел равно сумме всех предшествующих: 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9 = 27.

Вот две четверицы, одна получается сложением, а другая умножением, и они охватывают музыкальные, геометрические и числовые отношения, из которых складывается всякая гармония.

Третья четверица — та, которая в той же пропорции охватывает по природе все величины. Что в первой четверице единица, то в этой — точка. В той были потенциально сторонние числа 2 и 3, а в этой — два вида линии, окружность и прямая, для чётного — прямая, поскольку она ограничена двумя точками, а для нечётного — окружность, поскольку она охвачена одной линией, не имеющей концов. В той были потенциально квадратные числа 4 и 9, а в этой — два вида поверхности, прямолинейная и сферическая. В той были потенциальные кубы 8 и 27, из них чётный — 8,

[12] В греческом тексте два названия для математической точки — σημεῖον и στιγμή.

а нечётный — 27; в этой же — двоякие тела, охваченные поверхностями вращения шар и цилиндр, и составленные из плоскостей куб и пирамида. И эта третья четверица образует от точки линию, поверхность, тело.

Четвертая четверица содержит простые тела: огонь, воздух, воду, землю, составляющие числовую пропорцию. В той была единица, а в этой — огонь; двойка — воздух, тройка — вода, четверка — земля. Такова природа элементов при измельчении и утолщении, что огонь относится к воздуху как 1 : 2, к воде — как 1 : 3, к земле — как 1 : 4, и схожая пропорция имеется между всеми остальными.

Пятая четверица — фигура простых тел. Пирамида — фигура огня, октаэдр — воздуха, икосаэдр — воды, куб — земли.

Шестая четверица — порядок порождения. Семя — аналог единицы и точки, длина — двойки и линии, ширина — тройки и поверхности, толщина — четверки и тела.

Седьмая четверица — общественная. Ее начало и единица — человек, двойка — дом, тройка — квартал, четверка — город. И из них состоит народ.

Эти четверицы материальны и воспринимаемы чувствами.

Восьмая четверица — суждений, умственная и сущностная: ум, знание, мнение, чувственное восприятие. Ум — по своей сути единица; знание — двойка, ведь знание именно таково; мнение — тройка, и мнение находится между знанием и неведением; чувственное восприятие — четверка, ведь оно четырехчленно, и чувство осязания является общим для всех, ибо все чувства действуют через осязание.

Девятая четверица — части живого, душа и тело. И душа имеет три части: разумную, страдательную и волевую, а четвертое — тело, в котором душа.

Десятая четверица — времена года, и они все порождают: весна, лето, осень, зима.

Одиннадцатая четверица — возрасты: ребенок, юноша, муж, старик.

Вот одиннадцать четвериц: первая — сложения чисел, вторая — умножения чисел, третья — величин, четвертая — простых тел, пятая — фигур, шестая — порождений, седьмая — обществ, восьмая — суждений, девятая — частей живого, десятая — времен года, одиннадцатая — возрастов. И они составляют пропорцию: что в первой и во второй единица, то в третьей — точка, в четвертой — огонь, в пятой — пирамида, в шестой — семя, в седьмой — человек, в восьмой — ум, и оставшиеся тоже пропорциональны. Вот первая — единица, двойка, тройка, четверка; вторая — единица, сторона, квадрат, куб; третья — точка, линия, поверхность, тело; четвертая — огонь, воздух, вода, земля; пятая — пирамида, октаэдр, икосаэдр, куб; шестая — семя, длина, ширина, глубина; седьмая — человек, дом, квартал, город; восьмая — ум, знание, мнение, чувственное восприятие; девятая — разумное, страдательное, волевое, тело; десятая — весна, лето, осень, зима; одиннадцатая — ребенок, юноша, муж, старик. И из этих четвериц составлен совершенный космос, и он настроен по геометрии, гармонии и числу, и потенциально содержит всю природу числа, всякую величину и всякое тело, простое и сложное. Ведь все является его частью, а он не является частью чего-нибудь еще. Потому пифагорейцы и давали упомянутую клятву, и еще они говорили, что число подходит ко всему. Вот они и были мудрыми, ибо все числа сводили к десятке, ведь за десяткой нет чисел, и мы всегда идем по порядку от единицы к десятке. А десятка состоит из четверки: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, так что все числа потенциально созерцаются в четверке.

Свойства чисел первой десятки

Единица является началом всего и возглавляет все. И из нее все, а она не из чего-нибудь еще, неделимая и в возможности все, неизменимая, никогда не покидающая своей природы при умножении. И в ней — все умопостигаемое, и нерожденное, и природа идей, и бог, и ум, и красота, и благо, и прочие умопостигаемые сущности, такие как красота сама по себе, справедливость сама по себе, равенство само по себе. Ведь все прочее мыслится как одно и через него.

Первое увеличение и изменение единицы есть двойка, получаемая удвоением единицы. И в ней — материя, и все воспринимаемое чувствами, и рождение, и движение, и увеличение, и составление, и общность, и соотнесенное.

Двойка, составленная с единицей, дает три, и оно первое имеет начало, середину и конец. И о нем первом говорят «все»; а о меньших не говорят «все», но говорят либо «одно», либо «одно и другое», о трех же говорят «все». И мы делаем три возлияния, чтобы показать, что все хорошо; и называем трижды несчастным того, кто во всем несчастен, и трижды блаженным — того, кто во всем благ. И оно первое, в котором содержится природа поверхности. Ведь тройка есть образ поверхности, и первым ее воплощением является треугольник, а у него имеются три рода: равносторонний, равнобедренный и разносторонний. И имеется три рода углов: прямой, единый по природе, определенный и состоящий из равенства и подобия, благодаря которым все прямые углы равны между собой, будучи средними между острыми и тупыми, как превзойденными и превосходящими; прочие же — неограниченные и неопределенные, ведь они могут быть большими или меньшими. Из тройки, единицы и двойки складывается 6 — первое совершенное число, равное сумме своих частей; и это первое совершенное, сложенное с первым квадратом, дает декаду.

Четверка является первым образом тела, и это первое квадратное число среди чётных. И в ней заключены все созвучия, как было показано.

Пятерка является средним в декаде. Ведь из каких бы двух чисел ни была сложена десятка, их среднее по арифметической пропорции будет равно 5. Таковы 9 + 1, 8 + 2, 7 + 3, 6 + 4. Все они дают в сумме 10, и среднее по арифметической пропорции равно 5, что видно на рисунке, где любое сложение двух противоположных чисел дает 10, и среднее равно 5 по арифметической пропорции, и всюду края превышают среднее и превышаются им на одно и то же число. И оно первое содержит все виды чисел, чётное и нечётное, каковы двойка и тройка: ведь единица не является числом.

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Число 6 — совершенное, потому что оно равно сумме своих долей, как было показано. Поэтому оно называется брачным, ведь дело брака — производить потомство, подобное родителям. От него впервые составляется гармоническое среднее[13]: от 6 берется в сверхтретьем отношении 8, в двукратном — 12: вот 6 8 12; и на одну свою часть края превосходят и превосходятся, а именно на треть. А арифметическое среднее от 6 составляется так: берется в полуторном отношении 9, в двукратном — 12; и на одно число 9 превосходит и превосходится краями. И оно может быть средним в геометрической пропорции: берется его половина 3 и двукратное к нему 12, и получается геометрическая пропорция 3 6 12. Ведь в одном отношении 6 превосходит и превосходится краями, а именно в двукратном.

Следующее число декады, семерка, обладает примечательным свойством. А именно, оно одно в декаде не рождается из другого и не рождает другое. Поэтому пифагорейцы называли его Афиной, у которой нет матери и сама она не мать. Оно не рождается от спаривания и не спаривается. Среди чисел декады одни рождают и рождаются, так 4 через двойку рождает 8, само же оно рождается от двойки. Другие рождаются, но не рождают, так 6 рождается от 2 и 3, но в декаде ничего не рождает. Иные же рождают, но не рождаются, так 3 и 5 не рождаются из спаривания чисел, но 3 рождает 9 и с двойкой рождает 6, а 5 с двойкой рождает 10. Только 7 не рождается спариванием и в пределах декады спариванием ничего не рождает.

Платон в *Тимее*, следуя природе, составляет душу из семи чисел (Тимей, 35b). День и ночь, говорит Посидоний, обладают природой чётного и нечётного. Месяц составляется из чётырех седмиц, и первая седмица ограничена половинной луной, вторая — полнолунием, третья — половинной, четвертая же заканчивается соединением с солнцем, и в следующую седмицу начинается новый месяц. Утробный плод оформляется полностью за семь месяцев, как пишет Эмпедокл в *Очищениях*. Другие же говорят, что мужское начало оформляется за пять месяцев. И рождаются на седьмом месяце, и через семь месяцев после рождения прорезаются зубы, а полностью они вырастают за семь лет. Половое со-

[13] Это не так: ведь можно составить гармоническую пропорцию 2 3 6.

зревание — ко второй седьмице, а к концу третьей начинает расти борода, а возмужание всего тела происходит на четвертой седмице.

И кризис болезни приходится на седьмой день, и седьмой день — самый тяжелый во всех перемежающихся лихорадках, даже в трех- и четырехдневных. От равноденствия до равноденствия — семь месяцев[14], и количество планет — семь. И от солнцестояния до солнцестояния — семь месяцев. И отверстий на голове семь. И внутренностей семь: язык, сердце, легкие, печень, селезенка, две почки. Херофил говорит, что кишки человека имеют 28 локтей длины, т. е. четыре седмицы. И самые большие проливы обращают направление течения семь раз на дню.

Что касается восьмерки, это первый куб, составленный из единицы и семерки. Некоторые говорят, что имеется всего восемь главных богов, что обнаруживается и в орфической клятве:

> О, прародители, смерти не знавшие, сущие вечно:
> Огонь и вода, земля и небо, луна и солнце,
> Нового дня сиянье и черная ночь, я вас призываю!

И Евандр говорит, что на египетской стеле находится надпись, посвященная владыке Крону и владычице Рее: «Старейшему и бессмертному богу Осирису, владыке дыхания, неба и земли, ночи и дня, отцу сущего и грядущего, Эросу, в память о его величии и в почитание его жизни». Тимофей сообщает, что поговорка «во всем восемь» возникла оттого, что в космосе восемь сфер окружает землю, как говорит Эратосфен:

> Плотно прилаженные друг к другу,
> Восемь сфер охватили своими кругами
> Девятую землю.

Число девять — первый квадрат среди нечётных. Первые числа, два и три, чётное и нечётное, производят два первых квадрата, 4 и 9.

---

[14] В том же смысле, в котором греки говорили, что следующая олимпиада наступает после предыдущей на пятый год, называя олимпийский цикл «пятилетним».

И конечно, декада завершает собой все числа, охватывая собой природу обоих, чётного и нечётного, подвижного и неподвижного, добра и зла. Об этом много поведали Архит в книге *О декаде* и Филолай в книге *О природе*.

Средние

Вернемся теперь к учению о пропорциях и средних. Есть несколько средних: геометрическое, арифметическое, гармоническое, противоположное, пятое и шестое. Говорят, что обращением каждого из них получается еще шесть противоположных. Адраст утверждает, что пропорцией в собственном смысле называется лишь геометрическое среднее, идущее первым, и остальные от него зависят, а оно от них — нет, как будет показано. Прочие же средние называются пропорциями в обобщенном смысле.

У пропорции в собственном смысле, а именно у геометрической, пределы и отношения иногда выразимы (такова пропорция 12 6 3, в двукратном отношении, и всякая другая, составленная из чисел), иногда невыразимы и иррациональны (таковы величины, тяжести, времена); а отношения бывают двукратными, трехкратными, прочими многократными либо сверхчастными. Как уже сказано, средний член превосходит и превосходится крайними: в геометрической пропорции — в одном отношении, в арифметической — на одно число, в гармонической — на одну и ту же часть крайних.

Порождение и разложение пропорций

Адраст показывает, что отношение равенства — начальное и первое, и пропорция тоже, а все прочие отношения и пропорции из них составляются и в них разрешаются. Эратосфен говорит, что всякое отношение возрастает или по интервалу, или своими членами; но равенству никакой интервал не причастен, так что оно может возрастать лишь своими членами. Взяв три величины, составим из них пропорцию и покажем, что вся математика состоит из количественных пропорций, и что [равенство] является началом, элементом и природой пропорции. Эратосфен говорит, что он опустит доказательства. Но Адраст сознательно показывает, что каковы бы ни были три члена пропорции, из них можно составить три других, положив первый равным первому, второй — сумме первого и второго, третий — сумме первого, удвоенного второго и третьего, и эти три члена опять составят пропорцию.

И из пропорции с равными членами возникает двукратная пропорция, из двукратной — трехкратная, из нее — четырехкратная, и так далее прочие многократные. К примеру, возьмем наименьшую пропорцию равенства из трех равных членов, т. е. из трех единиц. И составим три новых члена по указанному правилу: первый — из первого, второй — из первого и второго, третий — из первого, двух вторых и третьего. Получилась пропорция 1 2 4, в двукратном отношении. И снова составим из них другие члены по тому же правилу: первый — из первого, второй — из первого и второго, третий — из первого, двух вторых и третьего. Получилась пропорция 1 3 9 в трехкратном отношении. Из нее подобным образом составляется пропорция 1 4 16 в четырехкратном отношении, из нее — 1 5 25 в пятикратном отношении, и так далее до бесконечности, получая последовательно все имеющиеся многократные.

1	1	1
1	2	4
1	3	9
1	4	16
1	5	25
1	6	36
1	7	49
1	8	64
1	9	81
1	10	100

Из обращенных многократных подобным образом мы составим сверхчастные отношения и состоящие из них пропорции: из двукратной — полуторную, из трехкратной — сверхтретью, из четырехкратной — сверхчетвертную, и всегда в таком порядке. К примеру, возьмем трехчленную пропорцию в двукратном отношении, и ее наибольший член переставим на первое место. Образуем из нее три новых члена по тому же правилу: из пропорции 4 2 1 получается пропорция 4 6 9 в полуторном отношении. Снова возьмем трехчленную пропорцию в трехкратном отношении 9 3 1:

из нее по тому же правилу составляется сверхтретья трехчленная пропорция 9 12 16. Из четырехкратной составляется сверхчетвертная 16 20 25, и так далее по порядку все имеющиеся одноименные.

4	6	9
9	12	16
16	20	25
25	30	36
36	42	49
49	56	64
64	72	81
81	90	100

Из сверхчастных получаются сверхмногочастные и многократные-и-сверхчастные, и опять из сверхчастных — другие сверхчастные и многократные-и-сверхмногочастные. Большинство из них мы опустим за ненадобностью, некоторые же рассмотрим. Из полуторной пропорции с большим членом в начале по тому же правилу составляется пропорция в двухсверхтретьем сверхмногочастном отношении: так из 9 6 4 по тому же методу составляется 9 15 25. А если в начале стоит меньший член, из нее получается многократно-и-сверхчастная пропорция, а именно двукратная-и-половинная: так из 4 6 9 по тому же методу получается 4 10 25. Из эпитритной с большим членом в начале получается сверхмногочастная триждысверхчетвертная пропорция; так из 16 12 9 получается 16 28 49. А если в начале стоит меньший член, из нее получается многократно-и-сверхчастная пропорция, а именно двукратная-и-эпитритная: 9 21 49. Из сверхчетвертной с большим членом в начале получается сверхмногочастная пропорция, а именно четыреждысверхпятерная; так из 25 20 16 получается 25 45 81. А если в начале стоит меньший член, из нее получается многократно-и-сверхчастная пропорция, а именно двукратная-и-сверхчетвертная, так из 16 20 25 получается 16 36 81. И такой порядок продолжается до бесконечности, так что из одних получаются другие по тому же принципу, что далее рассматривать уже не нужно.

И как все пропорции и все их отношения составляются из первого отношения равенства, так же все они в него разрешаются.

Во всякой данной пропорции с тремя неравными членами мы вычтем из среднего члена меньший, а из большего — меньший и удвоенный средний за вычетом меньшего. Полученная пропорция будет той самой, из которой родилась данная. Если повторять это вычитание, в итоге оно разрешится в пропорцию равенства, из которой все и было составлено, и которая уже ни на что не разлагается, только на отношение равенства.

Классификация фигур

Эратосфен доказывает, что все фигуры также составляются по некоей пропорции, и это составление начинается с равенства и разрешается в равенство. Надо сказать и об этом. Все это обнаруживается в фигурах. Первой идет точка — не имеющий размеров и неделимый знак, граница линии, обладающая положением единица. Величина, имеющая одно протяжение и разделение — это линия, длина без ширины; два — поверхность, имеющая длину и ширину; три — тело, имеющее длину, ширину и глубину. Тело охватывается и ограничивается поверхностями, поверхность — линиями, линия — точками.

Среди линий прямая есть та, которая выпрямлена и как будто натянута между двумя точками, так что она является кратчайшей между этими концами, и лежит равным образом на всех своих точках. Кривая же не такова. Тем же отличается плоскость от произвольной поверхности. Поверхность — это граница всякого твердого тела, двояко протяженная по длине и ширине. Плоскость же — это выпрямленная поверхность. Через две точки плоскости проходит прямая, лежащая в этой плоскости. Параллельные прямые — это те, которые лежат в одной плоскости, не встречаются при их безграничном продолжении и всюду отстоят на одинаковое расстояние.

Плоские фигуры таковы, что все линии лежат в их плоскости. Прямолинейные из них суть те, которые ограничены прямыми, прочие же — непрямолинейные. Среди плоских прямолинейных фигур те, которые ограничены тремя сторонами, называются трехсторонними, четырьмя — четырехсторонними, многими — многосторонними. Четырехсторонние фигуры, у которых противоположные стороны параллельны, называются параллелограммами. Из них прямоугольными являются те, которые имеют прямые углы; а прямыми углы возникают, когда при падении прямой на прямую углы по обе стороны получаются равными. О всяком прямоугольнике говорится, что он охватывается равными сторонами, образующими прямые углы. Те прямоугольники, которые имеют четыре равные стороны, называются квадратами, прочие же — гетеромекными.

Среди тел те, которые охвачены шестью плоскими параллелограммами, называются параллелепипедами, и когда все параллелограммы прямоугольны, то и параллелепипеды тоже называются прямоугольными. Те из них, у которых равны все стороны, и они имеют равные длину, ширину и глубину и охвачены равными квадратами, суть кубы. Если у них длина и ширина равны, и основание квадратно, а высота меньше, то это пластины. А если длина и ширина равны, а основание больше, то это балки. А если все размеры не равны, то такие тела называются разносторонними.

Свойства средних

Теперь подробно поговорим о средних, ведь они необходимы для понимания сочинений Платона и содержащейся в них теории. Среднее возникает, когда между двумя однородными членами вставляется еще один однородный член. Так что превосходство первого большего над средним и превосходство среднего над меньшим соотнесены, и как первый член к себе самому или к другим, или же обратно, как меньший к другим.

В частности, арифметическое среднее таково, что оно превышает и превышается крайними на одно и то же число; например 1 2 3. Ведь число 2 на единицу превышает 1 и на единицу превышается 3. Этому среднему присуще то, что оно равно полусумме крайних. Вот 3 и 1 составляют 4, и это удвоенное среднее, 2.

Геометрическое среднее и пропорция в собственном смысле в одном и том же отношении превышает и превышается, например в многократном или в сверхчастном; таковы 1 2 4. Ведь 4 : 2 есть двукратное и 2 : 1 тоже двукратное. И далее, превосходства 2 над 1 и 4 над 2 состоят в том же самом двукратном отношении. Этой пропорции присуще то, что произведение средних членов равно квадрату среднего. В нашем примере произведение крайних дает

4, ведь 1 × 4 = 4. И 2, умноженное на себя, тоже дает 4, ведь 2 × 2 = 4. Так что крайние дают то же, что и средний: 1 2 4.

Гармоническое же среднее таково, когда имеются три члена, и первый к третьему имеет такое же отношение, что и превосходство первого [над вторым] к превосходству второго [над третьим]; например 6 3 2. Ведь шесть к двойке дает тройное отношение, и превосходство шестерки над тройкой, равное трем, тоже имеет тройное отношение к единице, равной превосходству тройки над двойкой. Этому среднему присуще то, что средний член превосходит и превосходится крайними на одну их часть. Возьмем 2 3 6: здесь шесть превосходит тройку на свою половину, и двойка превосходится тройкой на свою половину.

И если крайние сложить вместе и умножить на среднее, то результат будет удвоенным по сравнению с произведением крайних. Вот 6 + 2 = 8, и если результат умножить на средний член 3, произведение будет равно 24; и 2 × 6 = 12, к которому 24 будет двукратным.

Обратным к гармоническому называется такое среднее, когда третий член так относится к первому, как превосходство первого к превосходству второго. Вот 6 5 3. Здесь 6 превышает 5 на единицу, 5 превышает 3 на два. И 3 : 6 обратно двукратному. И единица, превышение первого числа, имеет к двойке, превышению второго числа, обратное двукратному отношение.

Пятое среднее получается, когда для трех членов третий так относится ко второму, как превышение первого к превышению второго. Вот 5 4 2. И 5 превышает 4 на единицу, а 4 превышает 2 на двойку. И 2 : 4 обратно двукратному. И 1 : 2 тоже обратно двукратному, а это и есть превышение первого к превышению второго числа.

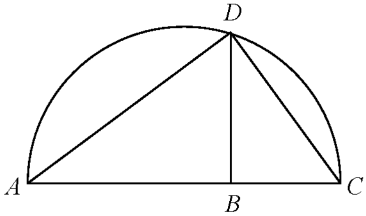
Шестое среднее получается, когда для трех членов второй так относится к первому, как превышение первого к превышению второго. Вот 6 4 1. И 6 превышает 4 на двойку, а 4 превышает 1 на тройку. И 4 : 6 обратно полуторному. И двойка, превышение 6, имеет к тройке, превышению четверки, обратное полуторному отношение.

Многое об этих и им противоположных средних было открыто пифагорейцами. Мы же, следуя пифагорейскому учению, сделали обзор математических принципов, собрав их и сжато изложив.

Среднее в арифметической пропорции находится так. К меньшему члену прибавляется половина от превышения большего над меньшим, и получается среднее; или берется суммы половинок от данных чисел, и получается среднее; или складываются оба, и берется половина (чтобы найти полезное для платоновских дел). Пусть предложены два числа 12 и 6 и берется средний член по арифметическому среднему. Возьмем превышение большего над меньшим, равное 6; его половина 3. Прибавим ее к меньшему, получится 9, среднее между 12 и 6, численно превышающее и превышаемое на три: 12 9 6. И опять, сначала сложим вместе крайние 12 и 6, получим 18. Его половина 9, и это среднее.

Среднее в геометрической пропорции находится так. Для числа, охваченного крайними членами, берется сторона квадрата, и так находится средний член. Пусть даны два числа 24 и 6. Нам предложено найти для них средний член в геометрической пропорции. Перемножив предложенное между собой, получим 144. Возьмем для него сторону квадрата, получится 12, и это среднее. Ведь как 24 : 12, так и 12 : 6, в двукратном отношении. Если крайние охватывают квадратное число, то средний член получается выразимым и соизмеримым по длине с крайними, и находимым в целых единицах. А если крайние охватывают неквадратное число, то тогда средний член соизмерим с крайними лишь в степени.

Вот общий способ его получения, будь то случай выразимых и рациональных чисел, или же величины соизмеримы лишь геометрически. Вот два члена, для которых среднее пропорциональное берется геометрически: пусть это AB и BC, лежащие по прямой. Построим полукруг на целом, и из B восстановим перпендикуляр BD до окружности. Он производит среднее между AB и BC в геометрической пропорции. Действительно, AD и DC производят в D прямой угол, ведь он находится в полукруге. Треугольник ADC — прямоугольный, и высота DB делит его на треугольники, подобные целому и между собой. Но когда углы равны, стороны пропорциональны. Так что как AB к BD, так и DB к BC. Поэтому BD будет средним пропорциональным между AB и BC, что и требовалось доказать.



Осталось показать, как находится средний член в гармонической пропорции. Пусть даны крайние в двукратном отношении, например 12 и 6. Превышение большего над меньшим, равное 6, мы умножим на 6 и получим 36. Приложим к нему сумму крайних, т. е. 18, и ширину на 18, т. е. 2, прибавим к меньшему, т. е. к 6, и получим искомое. Ведь 8 превышает и превышается крайними на одну их часть, а именно на треть: 12 8 6.

Пусть даны крайние в трехкратном отношении, например 18 и 6. Превышение большего над меньшим мы умножим на себя, получим $12 \times 12 = 144$, его половина 72, приложим к ней сумму крайних, т. е. 24, и ширину приложенного, т. е. 3, прибавим к меньшему, и получим искомое среднее 9, которое превышает и превышается крайними на половину: 18 9 6.

Имеется и более общий способ отыскания среднего гармонического между любыми двумя неравными членами. Умножим превышение на меньший член и результат приложим к сумме крайних, а затем прибавим ширину приложенного к меньшему члену. Пусть даны два члена 12 и 4. Превышение 12, равное 8, умножим на меньшее 4 и получим 32. Приложим к 32 сумму крайних 16, и получившуюся ширину 2 прибавим к меньшему 4; результат 6 будет средним гармоническим для 12 и 4, ведь он превышает и превышается крайними на половину крайних: 12 6 4.

Так передается самое необходимое и полезное в математических науках, требуемое для познания платоновских учений. Осталось запомнить основы астрономии.